ZUR GASDYNAMISCHEN EXPANSIONSSTRÖMUNG UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VARIABLER ENTROPIE

Ulrich Steffens

Düsseldorf 1983

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543926_0031

Zur gasdynamischen Expansionsströmung unter Berücksichtigung variabler Entropie

I n a u g u r a l - D i s s e r t a t i o n

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Düsseldorf

vorgelegt von
Ulrich Steffens
aus Mönchengladbach

Düsseldorf 1983

1. Berichterstatter: Prof. Dr. R.W. Larenz
2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Suchy

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Dezember 1983

ZUR GASDYNAMISCHEN EXPANSIONSSTRÖMUNG UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VARIABLER ENTROPIE

Einleitung und Übersicht 1

0. Bezeichnungen und Abkürzungen 8

1. Grundlagen und Gültigkeitsbereich der Gasdynamik 12

1.1 Die integralen Erhaltungssätze und thermodynamischen Zustandsgleichungen 12
1.2 Differentielle Formen der Erhaltungsgleichungen 14
1.3 System der Maxwellschen Transportgleichungen und Entropiebilanz 17
1.4 Dimensionsanalysis; charakteristische Kennziffern; Transportkoeffizienten 21

2. Die mathematische Struktur der gasdynamischen Gleichungen 25

2.1 Lax'sche Theorie der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen 26
2.2 Die Stoßrelationen von Rankine-Hugoniot 29
2.3 Charakteristiken-Methode und die Riemann'sche Lösung der "einfachen Wellen" 31
2.4 Die Ähnlichkeitslösung von Burgers 34
2.5 Die nichtlineare Diffusionsgleichung von Burgers 35
2.6 Mathematisches Beispiel einer Stoßwellenlösung 37

3. Näherungsverfahren zur Lösung der eindimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Gase 41

3.1 Vorbemerkungen zur Näherung 41
3.2 Lösung der linearisierten gasdynamischen Gleichungen mit Dämpfung 43
3.3 Entwicklung um die Riemann'sche Lösung der einfachen Wellen 47

4. Freie Expansionsströmung eines Knudsen-Gases 51

4.1 Kompressible Gasdynamik auf der Grundlage der stoßfreien Boltzmann-Gleichung 51
4.2 Beispiele spezieller Anfangsverteilungen 56
4.3 Herleitung der Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit 60
4.4 Untersuchung der Klasse der Ähnlichkeitslösungen 62
4.5 Beispiele für Stoßwellen-ähnliche Lösungen 63
4.6 Zur Gay-Lussac'schen freien Expansion 68
4.7 Diskussion und numerische Verallgemeinerung 71

5. Analytische Behandlung der eindimensionalen Expansionsströmung in der idealen anisentropen Gasdynamik 75

5.1 Das Gleichungssystem der idealen anisentropen Gasdynamik 75
5.2 Folgerungen aus der Lagrange-Formulierung 78
5.3 Darstellung in charakteristischen Variablen 80
5.4 Exakte Sonderlösung in Verallgemeinerung der Burgers-Lösung 82
5.5 Lösung der Gleichungen für ein Randwertproblem 85
5.6 Die Homologielösung bei Erfüllung der globalen Erhaltungssätze 89
5.7 Erweiterungen der Lösung auf allgemeinere Strömungsprobleme 95

6. Numerische Methoden zur Lösung nichtlinearer hyperbolischer Systeme 100

6.1 Grundlagen der numerischen Verfahren und spezielle Bezeichnungen 101
6.2 Standard-Differenzen-Verfahren 104
6.3 Korrekturverfahren zur Berücksichtigung von Unstetigkeiten 107
6.4 Die Godunov-Iteration und die Random-Choice-Lösung 110
6.5 Vergleich und Diskussion der numerischen Verfahren 116

7. Zusammenfassung 120

8. Anhang 123

8.1 Allgemeine Koordinatentransformationen 123
8.2 Lösung eines Systems linearer Diffusionsgleichungen 124
8.3 Integrale über Gauß-Verteilungen 126
8.4 Numerische Operatoren 127
8.5 Übersicht über die numerischen Lösungsverfahren 128
8.6 Implementierung des Glimm-Chorin-Verfahrens 129
8.7 Ableitung der Gleichung von Taub 131

9. Literaturverzeichnis 132

Einleitung und Übersicht

Gegenstand dieser Untersuchungen ist die analytische und numerische Beschreibung instationärer Gasbewegungen, wie sie z.B. bei Strömungsvorgängen im linearen Stoßwellenrohr, hervorgerufen durch platzende Membranen, Kolbenbewegungen oder Reflexionen an Wänden, oder bei Expansionsströmungen von Gaswolken im interstellaren Raum auftreten.

Insbesondere interessieren uns die zeitliche Entwicklung - eventuell unstetiger - Anfangsdichten der Gase sowie das Auftreten von Überschallströmungen und Stoßwellen. Charakteristisch für derartige Strömungen - und im wesentlichen gerade in der Umgebung von Stoßfronten von besonderer Bedeutung - sind die dabei auftretenden Effekte der Wärmeleitung, Diffusion und inneren Reibung. Die Beschreibung dieser inneren Transportvorgänge erfordert also (zumindest lokal) eine Nichtgleichgewichtstheorie, wie sie etwa die kinetische Gastheorie darstellt.

In diesem Kontext erlauben allgemeine Näherungsverfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichung (vgl. Suchy /65/, Cercignani /11/) die Berechnung der Transportkoeffizienten und die Untersuchung der Stoßwellenstrukturen (vgl. Zoller /74/, Grad /22/, Mott-Smith /49/, Weitzsch /67/). Auf der Basis geeigneter Ansätze für die molekularen Wechselwirkungskräfte ist die Boltzmann-Gleichung numerisch lösbar (vgl. /14/, /20/, /10/). Auch werden in letzter Zeit Computersimulationen von Vielteilchensystemen (vgl. Bird /3/, 1976) zur Untersuchung des gaskinetischen Verhaltens herangezogen.

Die Ergebnisse bzgl. der Stoßwellenstrukturen zeigen, daß die Stoßwellenbreite nur wenige mittlere freie Weglängen beträgt, so daß auf einer makroskopischen Längenskala scharfe Stoßkanten erscheinen, womit also die Gebiete, in denen nennenswerte Dissipationseffekte auftreten, auf schmale Grenzschichten beschränkt bleiben. Dieses legt die Betrachtung der Strömungsgrößen innerhalb verschiedener räumlich scharf trennbarer Bereiche nahe.

Bei dichteren Gasen und nicht zu starken Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht benutzt man das (aus der Boltzmann-Gleichung ableitbare) Gleichungssystem der kompressiblen und dissipativen Gasdynamik mit der Kontinuitätsgleichung für die Massendichte, der Navier-Stokes-Gleichung für die Impulsdichte und der Wärmeleitungsgleichung für die Energiedichte.

Die Lösung der durch diese nichtlinearen Gleichungen beschriebenen Anfangs- und Randwertprobleme bereitet - auch in der numerischen Behandlung - große Schwierigkeiten. Allerdings existieren spezielle Lösungen zu den Grenzfällen der Theorie, die jeweils auf ganz bestimmte Strömungsprobleme angewendet werden können:

Im Bereich der Unterschallströmungen ist die Dichteänderung häufig vernachlässigbar, und die verbleibende inkompressible Navier-Stokes-Gleichung ist zumindest numerisch lösbar (vgl. z.B. Chow /16/, Chung /17/). Überwiegen die Zähigkeitseffekte gegenüber der Konvektion innerhalb der Strömung, so führt die Lösung der linearisierten Gleichungen zu brauchbaren Ergebnissen. Ferner stellt der Grenzfall vernachlässigbarer Dissipationseffekte den Gültigkeitsbereich der nichtlinearen Euler-Gleichungen innerhalb der idealen Gasdynamik dar, welche die Situation charakterisiert, daß an jeder Stelle des Mediums zu jedem Zeitpunkt ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht vorliegt.

Diese Arbeit beschäftigt sich hauptsächlich mit der theoretischen Beschreibung der eindimensionalen Ausgleichsströmung eines bereichsweise homogenen Gases infolge anfänglicher Dichte- oder Druckdiskontinuitäten. Dazu werden einerseits näherungsweise Lösungen der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und andererseits wesentlich Lösungen der (anisentropen) Euler-Gleichungen hergeleitet. Zusätzlich zu dieser gasdynamischen Betrachtung werden hierzu - ausgehend von der stoßfreien Boltzmann-Gleichung - Untersuchungen aufgrund der gaskinetischen Theorie durchgeführt.

Das System der Euler-Gleichungen, welches mathematisch ein nichtlineares hyperbolisches System differentieller Erhaltungsgleichungen ist, wurde - unter Voraussetzungen isentroper Verhältnisse - für ein Anfangswertproblem schon 1860 durch Riemann in impliziter Form gelöst. Dabei wurde erstmals eine Beschreibung für das Aufsteilen einer Kompressionswelle als Vorstufe einer Stoßwelle gegeben (vgl. R.Becker /2/).

Die Anwendung der idealen Gasdynamik auf die Beschreibung eines solchen Verdichtungsstoßes deutet die Existenz von Unstetigkeiten im räumlichen und zeitlichen Verhalten der Zustandsgrößen an. Wie Rankine und Hugoniot (1869 bzw. 1889) aufgrund prinzipieller Betrachtungen über Erhaltungsgrößen herleiteten, müssen an derartigen Unstetigkeitsstellen bestimmte Übergangs- oder Sprungbedingungen für die Zustandsgrößen vor und hinter einer Stoßfront gelten. Diese Übergangsbedingungen implizieren insbesondere Änderungen der Entropiedichte, was im Widerspruch zur Riemann'schen Annahme der Isentropie steht.

Für die Beschreibung der eindimensionalen Ausgleichsströmung sind aus den genannten Gründen globale Lösungen der isoentropen Gasdynamik wenig geeignet; trotzdem wird diese Theorie aber zur bereichsweisen Näherungsbeschreibung verwendet. Bisherige Ansätze zu analytischen Lösungen fußen nämlich auf der Idee, die Rankine-Hugoniot-Relationen als Randbedingungen für stetige Bereiche vorzugeben, für die dann jeweils die Gleichungen der idealen isentropen Gasdynamik zu lösen sind. Eine derartig konstruierte vereinfachte Darstellung für den prinzipiellen Verlauf der Strömung gab z.B. Taub 1943 (vgl. Wright /72/, Oertel /52/).

Zur Beschreibung des als Expansionsfächer bezeichneten glatten Strömungsbereiches lieferte Burgers /6/ 1943 eine elegante explizite Lösung für den isentropen Fall. Wesentliches Merkmal dieser Lösung ist der in der Ähnlichkeitsvariablen $z = x/t$ lineare Verlauf von Strömungs- und lokaler Schallgeschwindigkeit. Neben den prinzipiellen Schwierigkeiten,

haltungssätze konstruierten Larenz und Wenk (vgl. /69/ 1974, /36/ 1978) für das Problem der Abströmung eines Gases ins Vakuum (im Rahmen der isentropen Gasdynamik) eine Ähnlichkeitslösung als asymptotische Näherungslösung zum allgemeinen Expansionsproblem, welche die Existenz einer schwachen rückläufigen Stoßwelle der Mach-Zahl $M = \sqrt{2}$ vermuten läßt.

Zu allgemeinen Anfangswertproblemen der idealen gasdynamischen Gleichungen bei variabler Entropie sind bisher lediglich numerische Verfahren bekannt. So entwickelten Lax /37/, /24/ (nach 1954) und andere (vgl. die zusammenfassende Darstellung von Smoller /63/ 1983) in Verallgemeinerung der Riemann'schen Theorie ein neues Konzept zur Behandlung hyperbolischer Systeme von Erhaltungsgleichungen für bereichsweise stetig differenzierbare Lösungen. Diese mathematische Theorie der Stoßwellen, welche die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingungen und eine zusätzliche Entropiebedingung benutzt, bildet die Grundlage einer Vielzahl numerischer Lösungsverfahren (vgl. /4/, /27/, /55/, /57/, /64/).

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Einfluß variabler Entropie auf das allgemeine Verhalten der Strömungsgrößen untersucht. Wir orientieren uns dabei an den genannten theoretischen Beschreibungen der Strömungsvorgänge nach Riemann und Burgers auf der Grundlage der idealen Gasdynamik und in gaskinetischer Hinsicht an der Keller'schen Lösung.

Dazu werden im folgenden 1. Kapitel die Grundlagen und Voraussetzungen der Gasdynamik eines perfekten Gases zusammengestellt.

Das 2. Kapitel enthält die mathematisch-numerische Behandlung der gasdynamischen Gleichungen. Wichtige Gesichtspunkte sind dabei die allgemeine Betrachtung hyperbolischer Systeme nach Riemann und Lax, die Riemannsche Lösung der 'einfachen Wellen', die Burgers'sche Ähnlichkeitslösung der idealen isentropen Gasdynamik sowie die Burgers-Gleichung als Modell einer Stoßwellengleichung.

Im 3. Kapitel werden Näherungslösungen zu einem Anfangswertproblem des eindimensionalen instationären Navier-Stokes-

systems diskutiert. Die linearisierte Form der Gleichungen (Vernachlässigung der Konvektions- gegenüber den Reibungstermen) führt auf die bekannten Schallwellenlösungen (akustische Näherung), erweitert um Dämpfungsterme. Bei einer Entwicklung um die nichtlineare Riemannsche Lösung der 'einfachen Wellen' unter Berücksichtigung der Dissipationsterme von quadratisch-nichtlinearer Ordnung zeigt es sich, daß sich (in dieser Näherung) zwei Moden als Lösungen jeweils einer Burgers-Gleichung ergeben, während die dritte Mode einer gewöhnlichen Diffusionsgleichung genügt.

Dem Kapitel 4 liegt die kinetische Betrachtungsweise der Vorgänge bei der Expansion dünner Gase zugrunde. Ausgehend von den Voraussetzungen der Narasimha'schen Arbeit zur Verallgemeinerung der Kellerschen Lösung, wird gezeigt, daß für die Klasse der anfänglich isothermen Verteilungen die Transportgleichungen exakt die Form der Navier-Stokes-Gleichungen haben.
Neben der schon von Narasimha gefundenen Darstellung für die Massendichte lassen sich auch für die Strömungsgeschwindigkeit und die Temperatur entkoppelte Gleichungen angeben. Mittels einer geeigneten Zeit-Transformation führt der Ausdruck für die Geschwindigkeit explizit auf eine Burgers'sche Stoßwellengleichung. Für die so separierten Gleichungen lassen sich Ähnlichkeitslösungen mit Stoßwelleneigenschaften angeben; sie führen im Spezialfall auf die Kellersche Lösung, bei der der stoßwellenartige Charakter nicht mehr erkennbar ist. Die hier analytisch erhaltenen Lösungen sind geeignet zur Beschreibung des Anfangsverhaltens einer Expansionsströmung und sind vergleichbar mit numerisch berechneten gasdynamischen Ergebnissen. Hierzu wird ein numerisches Verfahren angegeben, bei dem auf die Einschränkung auf Knudsen-Gase und auf die vorausgesetzte isotherme Anfangsverteilung verzichtet werden kann.

Im 5. Kapitel gehen wir von den Gleichungen der idealen anisentropen Gasdynamik aus. Mittels charakteristischer Transformationen, welche die Ähnlichkeitsvariable $z = x/t$ und eine geeignete Entropievariable benutzen, läßt sich ein ite-

ratives Näherungsverfahren zur Lösung allgemeiner gasdynamischer Strömungsprobleme angeben. Als expliziter - in sich geschlossener - Sonderfall hierzu ergibt sich eine Lösung mit (in der Variablen z) linearem Geschwindigkeitsprofil u sowie einem Ausdruck für die lokale Schallgeschwindigkeit c in der Form $c = (u-z)\cdot\sqrt{1+\varphi(s)}$, worin die Funktion $\varphi = \varphi(s)$ gerade die Abweichung von der Burgers'schen Ähnlichkeitslösung, hervorgerufen durch die variable Entropie $s = s(z,t)$, beschreibt. Die so gefundene Lösung läßt sich z.B. an einen Unstetigkeitsrand einer zeitabhängigen Stoßfront mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Bedingungen anschließen. Die damit konstruierte analytisch darstellbare Lösung geht asymptotisch für große Zeiten in die von Wenk und Larenz (vgl. /36/, /69/) angegebene "$\sqrt{2}$ - Lösung" über.

Für den Fall des Überströmens eines Treibgases in ein Laufgas wird für diesen asymptotischen Endzustand in Analogie zur sogenannten Taub-Gleichung ein Verfahren zur Berechnung der Mach-Zahlen der entstehenden Stoßwellen angegeben.

Kapitel 6 schließlich liefert einen Überblick zu den neueren numerischen Lösungsverfahren auf der Grundlage der mathematischen Stoßwellentheorie.

0. Bezeichnungen und Abkürzungen

Zuerst sollen einige im folgenden verwendete Redeweisen, Bezeichnungen und Abkürzungen aufgelistet werden. Verwendet werden im wesentlichen die von der Internationalen Union für reine und angewandte Physik /29/ 1980 empfohlenen mathematischen und physikalischen Symbole, Einheiten und Formelzeichen.

1.) Formelzeichen werden indiziert mit i,j,k,n in der Art:

$$F^n_j \ , \ \underline{b}^j = \sum_{i=1}^{m} b^j_i \, \underline{e}_j \ , \ (\underline{\underline{P}})_{ij} = P_{ij} \ ,$$

worin diese Indizes ganzzahlig sind.

2.) Größen im ungestörten, ruhenden Gas werden mit dem Index o bezeichnet: ϱ_o ,

3.) Werte vor bzw. hinter einer Unstetigkeitsstelle oder Größen am linken bzw. rechten Rand einer Strömung werden mit l bzw. r indiziert: u_l, u_r; c_l, c_r .

0.1 Mathematische Operationen, Bezeichnungen und Funktionen

Skalare: Ort x, Zeit t, Funktionen $f=f(x)$, $\varphi=\varphi(x,t)$
Vektoren: Ortsvektor $\underline{x}$, Lösungsvektor $\underline{U}$
Matrizen, Tensoren: Drucktensor $\underline{\underline{P}}$, Diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}=\delta_{ij}\underline{e}_i\underline{e}_j$

Skalarprodukt zweier Vektoren:	$\underline{a}\cdot\underline{b} := \sum_{j=1}^{m} a_j b_j$
Skalarprodukt zweier Funktionen:	$\langle f \mid g \rangle := \int d^n v \; f(\underline{v}) g(\underline{v})$
dyadisches Produkt:	$\underline{ab} := \underline{\underline{C}}$ mit $C_{ij}=a_i b_j$
Kommutator:	$[F,G] := FG - GF$
Faltung, Faltungsintegral:	$(f*g)(x) := \int d\xi \; f(\xi) g(x-\xi)$
partielle Ableitung:	$f_t := \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = (\frac{\partial f}{\partial t})_x$
substantielle Ableitung:	$\frac{d}{dt} f := (\frac{\partial}{\partial t} + \underline{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \underline{x}}) f(\underline{x},t)$

0.2 Formelgrößen und Symbole

$a = a(x,t)$	Lagrange-Ortsvariable
$a = a_o$	thermische Geschwindigkeit
a^j	Eigenwert zur Matrix $\underline{\underline{A}}$
$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{U})$	Koeffizientenmatrix
$\underline{b}^j$	Eigenvektor
$B = \varrho w$	Relativ-Impulsdichte
$c = c(x,t)$	(lokale) Schallgeschwindigkeit

c_p, c_v	spezifische Wärmen
d^j	Eigenwert
D	Diffusionskoeffizient
d	Differential oder Differenzelement
det	Determinante einer Matrix: det $\underline{\underline{A}}$
div	Divergenz
$e = e(\underline{x},t)$	Gesamt-Energiedichte
$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\underline{x},t)$	Gesamt-Energie
$f = f(x)$	Funktion, allgemein
$f = f(\underline{x},\underline{v},t)$	Verteilungsfunktion
$f = f(y)$	Koeffizientenfunktion zu s
$\underline{F} = \underline{F}(\underline{U})$	Flußfunktion, -vektor
exp	Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$
erf	Fehler-Funktion
erfc	komplementäre Fehler-Funktion
$g = g(x)$	Funktion, allgemein
$g = g(\underline{x})$	Orts-Massendichte-Verteilung
$g = g(y)$	Koeffizientenfunktion zu c
$\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{G}}(x,t)$	Greensche Funktion, Grundlösung
grad	Gradient, Vektor-Ableitung
$h = h(\underline{x},t)$	Gesamt-Enthalpiedichte
h	Plancksche Konstante
$h = h(\underline{v})$	Gleichgewichts-Verteilung
$i = i(\underline{x},t)$	innere Enthalpiedichte
$\underline{j} = \underline{j}(\underline{x},t)$	Impulsdichte
J	Funktionaldeterminante
$\mathcal{J}$	Impuls
K	Konstante
k	Fourier-Variable, Wellenzahl
k	Boltzmann-Konstante
Kn	Knudsen-Zahl
L	Referenzlänge
ln	Logarithmus, natürlicher
$m = m_o$	Molekülmasse
m	Mittelwert-Operator
Ma	Mach-Zahl als Kennziffer
M	Mach-Zahl bei Stoßwellen
$\mathcal{M}$	Masse

n	Anzahl der Freiheitsgrade $n = \frac{2}{\varkappa - 1}$
$p = p(\underline{x},t)$	(thermodynamischer) Druck
$\underline{\underline{P}}$	Drucktensor
Pr	Prandtl-Zahl
$\underline{q} = \underline{q}(\underline{x},t)$	Wärmestromdichte, -vektor
rot	Rotation
R	spezifische Gaskonstante
$\underline{\underline{R}}$	Reibungsmatrix
Re	Reynolds-Zahl
s	spezifische Entropiedichte
S	Entropiedichte $S = \varrho s$
Sp	Spur eines Tensors
$\mathcal{S}$	Entropie
t	Zeit-Variable
T	(thermodynamische) Temperatur
$\underline{u}$, u	Strömungsgeschwindigkeit
$\underline{U}$	Lösungsvektor
$\underline{v}$, v	Teilchengeschwindigkeit
$\mathcal{v}$	Geschwindigkeit
w	Relativ-Geschwindigkeit
W	Geschwindigkeit eines Unstetigkeit (Stoßfront)
$\underline{x}$, x	Orts-Variable
y	charakteristische Variable zu s
Y	Ortsfunktion einer Unstetigkeit (Stoßfront)
z	Ähnlichkeitsvariable
α	Temperaturleitfähigkeit $\alpha = \frac{\lambda}{\varrho c_p}$
$T^{\pm}$	Riemannsche Invariante $T^{\pm} = u \pm n\, c$
$\delta = \delta(x)$	Dirac-Funktion $\int_{\mathbb{R}} dx\, \delta(x) = 1$
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\varepsilon = \varepsilon(\underline{x},t)$	innere Energiedichte
Δ	Laplace-Operator oder Differenz
η	Scherviskosität, dynamische Zähigkeit
η'	Volumenviskosität
$\theta = \theta(x)$	Heavisidesche Sprungfunktion $\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'\, \delta(x')$
$\varkappa$	adiabatischer Polytropenexponent
λ	Wärmeleitungszahl
λ	mittlere freie Weglänge
μ	Reibungszahl $\mu = \frac{4}{3}\eta + \eta'$

ν	kinematische Zähigkeit
π	Ludolphsche Zahl
ϱ	Massendichte
$\underline{\underline{\tau}}$	Reibungstensor
τ	Zeit-Variable
ξ	Orts-Variable
φ	Funktion
Φ	Wahrscheinlichkeitsintegral
ψ	Funktion

Bemerkung:

Wenn in einzelnen Abschnitten einige Zeichen eine abweichende oder hier nicht speziell aufgeführte Bedeutung haben, so sind sie dort jeweils besonders definiert oder aus dem Kontext zu verstehen.

1. Grundlagen und Gültigkeitsbereich der Gasdynamik

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der Gasdynamik und die charakteristischen Größen der Strömungsmechanik zusammengestellt. Beide Wege zur Herleitung des Navier-Stokes-Systems kompressibler Gase vom Standpunkt der Kontinuums- und der kinetischen Theorie werden kurz diskutiert. Ferner gehen wir auf den Begriff der Entropie ein, der im Rahmen der kinetischen Gastheorie erweitert werden muß. Schließlich werden mit Hilfe einer Dimensionsanalysis die verschiedenen Näherungsbereiche der gasdynamischen und gaskinetischen Theorie dargestellt.

1.1 Die integralen Erhaltungssätze und thermodynamischen Zustandsgleichungen

Betrachtet wird die Strömung eines kompressiblen Gases in einem Gebiet des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$. Sei dazu $G = G(t)$ ein mit der Gasströmung mitbewegtes, zeitabhängiges Gebiet, ∂G die zugehörige Oberfläche und $d\underline{o}$ der Oberflächenvektor in Normalenrichtung.
Hierfür gelten die folgenden integralen Erhaltungssätze, die die drei Grundprinzipien der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung beschreiben:

1.) Im Gebiet $G(t)$ wird weder Masse $\mathcal{M}$ erzeugt noch vernichtet.

2.) Die Änderungsrate des Impulses $\mathcal{J}$ im herausgegriffenen Strömungsgebiet G soll gleich den auftretenden Oberflächenkräften sein (2. Newton'sches Gesetz).

3.) Die zeitliche Änderung der Gesamtenergie $\mathcal{E}$ soll gleich der Leistung aller auf das Gebiet wirkenden Oberflächenkräfte (Leistung des Druckes und der Reibungsspannungen) zuzüglich der in das Gebiet pro Zeiteinheit einströmenden Energie sein.

$$(1.1)\quad \frac{d}{dt}\mathcal{M}(G,t) := \frac{d}{dt}\int_{G(t)} \varrho \, dV = 0$$

$$(1.2)\quad \frac{d}{dt}\,\mathcal{J}(G,t) := \frac{d}{dt}\int_{G(t)} \underline{j}\, dV = -\int_{\partial G} p\, d\underline{o} + \int_{\partial G} (d\underline{o}\cdot \underline{\underline{\sigma}})$$

$$(1.3)\quad \frac{d}{dt}\,\mathcal{E}(G,t) := \frac{d}{dt}\int_{G(t)} e\, dV = -\int_{\partial G} p(\underline{u}\cdot d\underline{o}) + \int_{\partial G} \underline{u}\cdot(d\underline{o}\cdot \underline{\underline{\sigma}}) - \int_{\partial G} (\underline{q}\cdot d\underline{o})\ .$$

Hierin werden mit dem Ortsvektor $\underline{x}$ und der Zeit t folgende Bezeichnungen benutzt:

(2.1)	$\varrho = \varrho(\underline{x},t)$	Massendichte
(2.2)	$\underline{u} = \underline{u}(\underline{x},t)$	Strömungsgeschwindigkeit
(2.3)	$\underline{j} = \underline{j}(\underline{x},t) = \varrho\,\underline{u}$	Impulsdichte
(2.4)	$p = p(\underline{x},t)$	(thermodynamischer) Druck
(2.5)	$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$	Reibungstensor
(2.6)	$\underline{q} = \underline{q}(\underline{x},t)$	Wärmestromvektor
(2.7)	$e = e(\underline{x},t)$	Gesamt-Energiedichte .

Der thermodynamische Druck p und die Reibungsspannungen σ_{ij} bilden den Drucktensor $\underline{\underline{P}}$ der Dimension n mit den Eintragungen

$$(2.8)\quad P_{ij} = p\,\delta_{ij} - \sigma_{ij} \quad \text{mit} \quad np = Sp\,\underline{\underline{P}}\ ,$$

worin der Reibungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ durch den spurfreien Anteil des Drucktensors definiert ist.

Wir setzen im folgenden die Zustandsgleichungen eines perfekten Gases, d.h. eines idealen Gases konstanter spezifischer Wärme c_v, voraus. Dann gelten mit der von der Gasart abhängenden spezifischen Gaskonstante $R = c_p - c_v$ (vgl.E.Becker /1/, oder /34/, /52/, /53/):

(3.1)	$p = \varrho RT$	thermische Zustandsgleichung
(3.2)	$\varepsilon = c_v\, T$	kalorische Zustandsgleichung.

Hierin bedeuten

(4.1)	$T = T(\underline{x},t)$	(absolute) Temperatur
(4.2)	$\varepsilon = \varepsilon(\underline{x},t)$	spezifische innere Energie
(4.3)	$i = c_p\, T$	spezifische innere Enthalpie

(4.4) $c_v = \frac{n}{2} R$ spezifische Wärme bei konstantem Volumen

(4.5) $c_p = \frac{n+2}{2} R$ spezifische Wärme bei konstantem Druck

(4.6) $\varkappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{n+2}{n}$ (adiabatischer) Polytropenexponent .

Mit $n = \frac{2}{\varkappa - 1}$ gilt außerdem:

(4.7) $e = \frac{p}{\varkappa - 1} + \frac{\varrho}{2} \underline{u}^2$ Gesamt-Energiedichte

(4.8) $h = e + p$ Gesamt-Enthalpiedichte .

Die Entropiedichte $s = s(\underline{x},t)$ werde über die Fundamentalgleichung der Thermodynamik

$$T ds = d\varepsilon - \frac{p}{\varrho^2} d\varrho$$

eingeführt; bei Voraussetzung (3) gilt dann mit den zugehörigen Ruhedaten s_o, ϱ_o, T_o

(4.9) $s = s_o - R(\ln \frac{\varrho}{\varrho_o} - \frac{n}{2} \ln \frac{T}{T_o})$

(4.10) $p = p_o (\frac{\varrho}{\varrho_o})^{\varkappa} \cdot \exp(\frac{s-s_o}{c_v})$.

Die Schallgeschwindigkeit $c = c(\underline{x},t)$ ist definiert durch

$$c^2 = (\frac{\partial p}{\partial \varrho})_s \quad \text{mit} \quad c \geq 0 :$$

und es ergibt sich mittels (4.10)

(4.11) $c^2 = \varkappa \frac{p}{\varrho} = c_o^2 (\frac{p}{p_o})^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \exp(\frac{s-s_o}{c_p}) = c_o^2 (\frac{\varrho}{\varrho_o})^{\varkappa-1} \exp(\frac{s-s_o}{c_v})$.

1.2 Differentielle Formen der Erhaltungsgleichungen

Bei Voraussetzung glatter (d.h. stetig differenzierbarer) Strömungsgrößen $\varphi(\underline{x},t)$ und $\underline{\Psi}(\underline{x},t)$ läßt sich bei den integralen Erhaltungssätzen (1) die Differentiation mit der Integration vertauschen derart, daß gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_G \varphi(\underline{x},t) \, dV = \int_G \{ \frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \underline{u}) \} \, dV .$$

Ferner lassen sich mit Hilfe des Gauß'schen Satzes die Oberflächenterme in Volumenintegrationen umformen:

$$\int_{\partial G} (\underline{\Psi} \cdot d\underline{o}) = \int_G \operatorname{div}(\underline{\Psi}) \, dV .$$

Da diese Beziehungen für beliebige Gebiete $G(t)$ gelten, erhält man ein zu den Grundgleichungen (1) äquivalentes System von differentiellen Erhaltungsgleichungen in sogenannter Euler-Darstellung (Divergenz-Form):

(5.1) $\rho_t + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0$ Kontinuitätsgleichung

(5.2) $(\rho \underline{u})_t + \operatorname{div}(\rho \underline{u}\underline{u}) = -\operatorname{grad} p + \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}$ Bewegungsgleichung

(5.3) $e_t + \operatorname{div}(h\underline{u}) = -\operatorname{div}(\underline{q} - \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{u})$ Energiegleichung .

Mit Hilfe der sogenannten substantiellen oder Lagrange-Ableitung, die sich aus lokalem und konvektivem Anteil zusammensetzt:

(6) $\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \operatorname{grad}$,

lassen sich die Grundgleichungen (5) überführen in die Lagrange-Darstellung:

(7.1) $\frac{d}{dt}\rho + \rho \operatorname{div} \underline{u} = 0$ Kontinuitätsgleichung

(7.2) $\rho \frac{d}{dt}\underline{u} + \operatorname{grad} p = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}$ Bewegungsgleichung

(7.3) $\rho \frac{d}{dt}\varepsilon + p \operatorname{div} \underline{u} = -\operatorname{div} \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \underline{u}$ Energiegleichung .

Die rechte Seite von (7.3) wird oft als Dissipationsfunktion bezeichnet; sie ist stets positiv (vgl. z.B. Lüst /41/).

In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der statistischen Mechanik (1. Näherung der Chapman-Enskog-Entwicklung, vgl. Abschnitt 1.4) stellen wir den Reibungstensor in der Navier-Stokes-Form dar (vgl. z.B. /41/, /34/):

(8.1) $\sigma_{ij} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div} \underline{u} \right) + \eta' \delta_{ij} \operatorname{div} \underline{u}$

mit den Koeffizienten der inneren Reibung (Zähigkeit oder Viskosität)

(8.2) $\eta = \eta(T, \rho)$ Scher-Viskosität

(8.3) $\eta' = \eta'(T, \rho)$ Volumen-Viskosität .

Für viele hydrodynamische Betrachtungen können diese Viskositätskoeffizienten in guter Näherung (vgl. Abschnitt 1.4) als konstant vorausgesetzt werden. In diesem Fall gilt:

(8.4) $\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \eta \triangle \underline{u} + \left(\frac{1}{3}\eta + \eta' \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u}$.

Den Wärmestromvektor $\underline{q}$ stellen wir in der Form des Fourier'schen Gesetzes dar:

(9) $\underline{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ mit $\lambda = \lambda(T, \varrho)$ Wärmeleitungszahl,

die in guter Übereinstimmung mit dem Experiment ebenfalls häufig als konstant vorausgesetzt werden kann (vgl. Abschnitt 1.4).

Mittels der thermodynamischen Beziehungen (3) und (4) läßt sich eine Vielzahl zu (5) und (7) äquivalenter Gleichungssysteme angeben. So benutzt man unter den gegebenen physikalischen Bedingungen häufig statt der Energiebilanz (7.3) eine Gleichung für die Entropiedichte s, für den Druck p oder für die lokale Schallgeschwindigkeit c:

(10.1) $\varrho T \frac{d}{dt} s = \Psi := -\operatorname{div} \underline{q} + \underline{\underline{\sigma}} : \operatorname{grad} \underline{u}$

(10.2) $\frac{d}{dt} p + \varkappa p \operatorname{div} \underline{u} = \frac{p}{c_v} \frac{d}{dt} s$

(10.3) $\frac{d}{dt} c + \frac{\varkappa - 1}{2} c \operatorname{div} \underline{u} = \frac{c}{2 c_v} \frac{d}{dt} s$.

Zwei - bei Kenntnis der Dissipationskoeffizienten μ und λ selbst-konsistente - Gleichungssysteme für eine eindimensionale Gasströmung sind z.B. gegeben durch:

(11.1) $\varrho_t + u\varrho_x + \varrho u_x = 0$

(11.2) $u_t + uu_x + \varrho^{-1} p_x = \varrho^{-1} (\mu u_x)_x$ mit $\mu := \frac{4}{3}\eta + \eta'$

(11.3) $p_t + up_x + \varkappa p u_x = \left(\frac{\lambda}{c_v}\left(\frac{p}{\varrho}\right)_x\right)_x + (\varkappa - 1)\mu u_x^2$,

oder anstelle der Druckgleichung die für die Schallgeschwindigkeit $\varkappa p = \varrho c^2$:

(11.3)' $c_t + uc_x + \frac{\varkappa - 1}{2} c u_x = \frac{1}{2\varrho c}\left\{\left(\frac{\lambda}{c_v}(c^2)_x\right)_x + \varkappa(\varkappa - 1)\mu u_x^2\right\}$.

Diese beiden Systeme werden wir in Kapitel 3 untersuchen, während wir in Kapitel 5 neben (11.2) und (11.3)' die Entropiegleichung (10.1) für die idealisierten Verhältnisse verschwindender Dissipationsterme für unsere Untersuchungen zugrundelegen.

1.3 System der Maxwellschen Transportgleichungen und Entropiebilanz

Zur Beschreibung der Strömungsvorgänge vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie aus dient die (kräftefreie) Boltzmann-Gleichung (vgl. Suchy /65/):

$$(12)\quad \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \underline{x}} = \int_{\mathbb{R}^n} d^n v_1 \, |\underline{v}-\underline{v}_1| \int_{\Omega} d\Omega \, Q_D(\Omega)(f^* f_1^* - f f_1) =: C(ff)$$

mit den Bezeichnungen $f_i := f(\underline{x},\underline{v}_i,t)$ und $f_i^* := f(\underline{x},\underline{v}_i^*,t)$ für Teilchengeschwindigkeiten $\underline{v}$ vor und nach einem Stoß, dem differentiellen Stoß-Wirkungsquerschnitt Q_D und dem differentiellen Raumelement $d\Omega$. Sie ist eine Entwicklungsgleichung für die Verteilungsfunktion f der Geschwindigkeiten $\underline{v}$. Die linke Seite der Gleichung kann formal als substantielle Ableitung der Verteilung f nach der Zeit t aufgefaßt werden, wobei diese zeitliche Änderung Partikelstößen zugeschrieben wird, deren Gewinn-Verlust-Bilanz durch den Integralausdruck der rechten Seite beschrieben wird ("Stoßterm").

In bekannter Weise (vgl. Suchy /65/) erhält man aus der Boltzmann-Gleichung die Transportgleichungen, welche die räumliche und zeitliche Entwicklung der Dichten und Ströme der Erhaltungsgrößen Masse, Impuls und Energie beschreiben. Multipliziert man nämlich Gleichung (12) mit einer Funktion $g = g(\underline{x},\underline{v},t)$ und integriert über den Geschwindigkeitsraum, so erhält man die allgemeine Maxwellsche Transportgleichung

$$(13)\quad \frac{\partial}{\partial t}\langle f|g\rangle + \frac{\partial}{\partial \underline{x}}\cdot\langle f|\underline{v}g\rangle = \langle f|\frac{\partial g}{\partial t} + \underline{v}\cdot\frac{\partial g}{\partial \underline{x}}\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} d^n v \cdot g C(ff) \; .$$

Setzt man für g die Stoßinvarianten $1, \underline{v}, \underline{v}^2$ ein, so verschwindet die rechte Seite, und man erhält fünf Differentialgleichungen für die Momente ϱ, $\underline{u}$ und e, welche gegeben sind durch:

$$(14.1)\quad \varrho(\underline{x},t) := \langle f \,|\, 1\rangle \qquad \text{Massendichte}$$

$$(14.2)\quad \underline{j}(\underline{x},t) := \langle f \,|\, \underline{v}\rangle =: \varrho(\underline{x},t)\underline{u}(\underline{x},t) \qquad \text{Impulsdichte}$$

$$(14.3)\quad e(\underline{x},t) := \tfrac{1}{2}\langle f \,|\, \underline{v}^2\rangle \qquad \text{Energiedichte} \; .$$

Weitere Tensor-Momente, welche in diesen Transportgleichungen auftreten, sind:

(14.4) $P_{ij} := \langle f \mid w_i w_j \rangle = \langle f \mid w_j w_i \rangle$ Drucktensor

(14.5) $q_i := \frac{1}{2} \langle f \mid w_i \underline{w}^2 \rangle$ Wärmestromdichte ,

worin $\underline{w} := \underline{v} - \underline{u}$ die sogenannte Eigengeschwindigkeit bedeutet.

Die übrigen Zustandsgrößen nach (3) und (4) lassen sich entsprechend ableiten, z.B.: $\varrho \varepsilon = \frac{1}{2} \langle f \mid \underline{w}^2 \rangle$ für die innere spezifische Energie ε .

Die fünf Transportgleichungen ergeben sich dann als:

(15.1) $\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho \underline{u}) = 0$ Massenbilanz

(15.2) $(\varrho \underline{u})_t + \operatorname{div}(\varrho \underline{u}\underline{u} + \underline{\underline{P}}) = 0$ Impulsbilanz

(15.3) $e_t + \operatorname{div}(e\underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\underline{P}} + \underline{q}) = 0$ Energiebilanz

und stimmen mit den Gleichungen (5) in dieser Form überein. Das System (15) ist jedoch nicht in sich geschlossen, da zur Berechnung von $\underline{\underline{P}}$ und $\underline{q}$ höhere Momente von f benötigt werden.

Zwischen den Größen besteht noch die Beziehung:

(16.1) $e = \frac{1}{2}(\operatorname{Sp} \underline{\underline{P}} + \varrho \underline{u}^2)$ mit $\operatorname{Sp} \underline{\underline{P}} = np$,

worin $p = p(\underline{x},t)$ der (thermodynamische) Druck, n die Anzahl der Freiheitsgrade bedeutet. Die Temperatur T ist über die Gleichung des idealen Gases mit der (spezifischen) Gaskonstante R definiert:

(16.2) $p = \varrho RT$.

Die Zahl der makroskopischen Variablen $\varrho, T, u_i, P_{ij}, q_i$ beträgt siebzehn. Diese Größen sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da zwischen ϱ und T die thermische Zustandsgleichung gilt, und zwischen den Komponenten des Drucktensors drei Symmetriebeziehungen der Form $P_{ij} = P_{ji}$ bestehen, so daß insgesamt dreizehn unabhängige Variable übrigbleiben.

Gewisse Schwierigkeiten bereitet jedoch in diesem Kontext die Definition der Entropiedichte s, deren Variation wir in dieser Arbeit besonders berücksichtigen wollen. Die Entropie S ist in der statistischen Mechanik der Gleichgewichtszustände als Maß für die Zahl der Realisierungsmöglichkeiten eines Zustandes definiert: $S = k \ln Z$. Diese Zahl Z der Realisierungsmöglichkeiten wächst mit der "Unordnung" eines statistischen Ensembles, so daß S in diesem Sinne als Maßzahl für diese Unordnung gilt. Mit Hilfe der (korrekten) Boltzmann-Statistik erhält man für die Entropiedichte pro Volumen eines einatomigen Gases ($n = 3$) (vgl. (4.9)):

$$(17)\quad S(\underline{x},t) = \varrho\, s(\underline{x},t) = \varrho R \left\{ \ln \frac{m(2\pi mkT)^{3/2}}{\varrho\, h^3} + \frac{5}{2} \right\}$$

mit dem Boltzmann-Faktor k, der Planckschen Konstanten h, der molekularen Masse m und der (spezifischen) Gaskonstanten $R = \frac{k}{m}$.

Gehen wir von der Maxwellschen Transportgleichung (14) für:

$$(18.1)\quad g = \ln f' - 1$$

mit der normierten Verteilungsfunktion:

$$(18.2)\quad f' = f\,\frac{h^3}{m^4}$$

aus, benutzen die informationstheoretischen Definitionen:

$$(19.1)\quad S(\underline{x},t) := -R \langle f \mid \ln f' - 1 \rangle \qquad \text{Entropie pro Volumen}$$

$$(19.2)\quad \underline{j}_S(\underline{x},t) := -R \langle f \mid \underline{v}(\ln f' - 1) \rangle \qquad \text{Entropiestrom},$$

so erhalten wir die Transportgleichung für S (vgl. Suchy /65/, Jäckle /30/):

$$(19.3)\quad \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j}_S = \int_{\mathbb{R}^3} d^3v \ln f' C(ff) =: \left(\frac{\delta S}{\delta t}\right)_{St},$$

worin für den Ausdruck der lokalen Entropieproduktion stets gilt:

$$(19.4)\qquad \left(\frac{\delta S}{\delta t}\right)_{St} \geq 0 .$$

Die Gesamt-Entropie $\mathcal{S} = \mathcal{S}(t)$ ist dann gegeben durch:

$$(20.1)\qquad \mathcal{S}(t) = -R \{ H(t) - \mathcal{M} \},$$

worin $\mathcal{M} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \langle f \mid 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x\, \varrho(\underline{x},t)$ die Gesamt-Masse

und $H = H(t)$ die Boltzmannsche Eta-Funktion mit:

(20.2) $$H(t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \, \langle f \mid \ln f' \rangle$$

bedeuten, für die das "H-Theorem" gilt:

(20.3) $$\frac{d}{dt} H(t) \leqq 0 \quad .$$

Dieser Aussage entspricht der Satz von der Entropiezunahme für das Gesamtvolumen eines abgeschlossenen Systems:

(20.4) $\frac{d}{dt} \mathcal{S}(t) \geqq 0$ bzw. lokal: $(\frac{\partial S}{\partial t})_{St} \geqq 0$.

Setzt man in (19) eine lokale Maxwell-Verteilung ein:

(21) $$f(\underline{x},\underline{v},t) = f_1(\underline{v};\, \varrho, \underline{u}, T) := \frac{\varrho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp\left\{ - \frac{(\underline{v}-\underline{u})^2}{2RT} \right\} ,$$

die ein lokales thermodynamisches Gleichgewicht beschreibt, so verschwindet der Ausdruck für die lokale Entropieproduktion $(\frac{\partial S}{\partial t})_{St}$, die gaskinetische Definition (19.1) der Entropiedichte S stimmt mit dem thermodynamischen Ergebnis (17) überein, und man erhält für den Entropiestrom:

(22.1) $$\underline{j}_S(\underline{x},t) = S\underline{u} = \varrho s \underline{u} \quad ,$$

womit die Gleichung (19.3) der Entropiedichte S die Form einer Kontinuitätsgleichung annimmt:

(22.2) $$(\varrho s)_t + \operatorname{div}(\varrho s \underline{u}) = 0 \quad ;$$

und für die spezifische Entropie s ergibt sich:

(22.3) $$\frac{d}{dt} s = s_t + \underline{u} \cdot \operatorname{grad} s = 0 \quad .$$

Dieses sogenannte Adiabatengesetz wird uns wesentlich in dieser Arbeit beschäftigen (vgl. Kapitel 5).

Die physikalischen Verhältnisse, bei denen speziell gilt: $s = \text{const}$, bezeichnet man als isentrop.

1.4 Dimensionsanalysis; charakteristische Kennziffern; Transportkoeffizienten

Für Zwecke der Abschätzung von Größenordnungen der Terme einer Gleichung und auch für numerische Rechnungen ist es sinnvoll, mit normierten, dimensionslosen Größen zu rechnen.

Überlegungen der elementaren Gaskinetik (vgl. z.B. /13/, /35/, /52/) liefern als Bezugsgrößen:

(23.1) $v_o = \sqrt{\frac{8k}{\pi m}T}$ mittlere thermische Geschwindigkeit

(23.2) $Q = \pi d^2$ Stoß-Wirkungsquerschnitt mit dem mittleren Teilchendurchmesser d

(23.3) $\lambda = \frac{m}{\rho\sqrt{2}Q}$ mittlere freie Weglänge .

Betrachten wir ferner eine Referenzlänge L und normieren die Größen der Gleichung (12) wie folgt:

$$\underline{x} = \underline{x}'L \qquad \underline{v} = \underline{v}'v_o \qquad t = t'\frac{L}{v_o}$$

(24) $f d^n v = \rho_o f' d^n v' \qquad |\underline{v} - \underline{v}_1| = v'_{rel}\, v_o$

$Q_D d\Omega = Q_D' d\Omega' \sqrt{2}\, Q$ Element des Wirkungsquerschnitts,

so läßt sich die Boltzmann-Gleichung in dimensionsloser Form schreiben:

(25) $\frac{d}{dt'}f' = Kn^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\Omega'} d^n v_1' v'_{rel} d\Omega' Q_D' (f'^* f_1'^* - f' f_1') =: Kn^{-1} C(f'f')$

mit der charakteristischen Kennziffer:

(26) $Kn := \frac{\lambda}{L}$ Knudsen-Zahl ,

als Verhältnis der mittleren freien Weglänge λ zu einer Referenzlänge L .

Für den Grenzfall sehr kleiner Knudsen-Zahlen ($Kn \longrightarrow 0$) muß dann gelten $C(ff) = 0$, wofür man die Maxwell-Verteilung als Lösung des Gleichgewichtszustandes erhält. Diese Bedingung bedeutet dabei gerade, daß in jedem makroskopisch noch interessierenden Volumen die Partikelstöße so zahlreich sind, daß nahezu ständig Gleichgewicht besteht. Die Vorgänge können in diesem Fall durch die Gleichungen der idealen Gasdynamik (vgl. Kapitel 5) beschrieben werden.

Für den anderen Grenzfall sehr großer Knudsen-Zahlen ($Kn \longrightarrow \infty$) verschwindet die rechte Seite der Boltzmann-Gleichung. Dies bedeutet, daß bei wachsender mittlerer freier Weglänge λ der Einfluß der Stöße abnimmt. In diesem Fall der freien Molekülbewegung erhält man für die Verteilungsfunktion f die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} f = 0 \quad , \tag{27}$$

die man als stoßfreie Boltzmann-Gleichung, Vlasov- oder auch Liouville-Gleichung bezeichnet. Sie wird zur Beschreibung des sogenannten Knudsen-Gases (vgl. Kapitel 4) verwendet.

Schwache Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht ($Kn \ll 1$) führen auf den Gültigkeitsbereich des Navier-Stokes-Systems, das man in erster Näherung der Chapman-Enskog-Entwicklung (vgl. /13/) erhält, wenn man als nullte Näherung die lokale Gleichgewichtsverteilung (21) f_1 verwendet:

$$f \longrightarrow f_1(1 + Kn\,\phi) \quad , \tag{28}$$

worin diese Abweichung ϕ und auch die Transportkoeffizienten η, λ der Navier-Stokes-Gleichungen berechenbar sind (vgl. Chapman, Cowling /13/, Suchy /65/).

Zur gegenseitigen Abschätzung der Terme des Navier-Stokes-Systems benutzen wir o.B.d.A. die Gleichungen (11) in eindimensionaler Form mit den Variablen ϱ, u, p und der Normierung:

$$\begin{aligned} &x = x'L \qquad t = t'\frac{L}{u_o} \qquad u = u'u_o \\ &\varrho = \varrho'\varrho_o \qquad p = p'p_o \qquad \mu = \mu'\mu_o \qquad \lambda = \lambda'\lambda_o \; . \end{aligned} \tag{29}$$

Das Gleichungssystem hat dann die Gestalt:

$$\frac{d}{dt'}\varrho' + \frac{\partial}{\partial x'}(\varrho' u') = 0 \tag{30.1}$$

$$\varrho' \frac{d}{dt'}u' + K_1 \frac{\partial}{\partial x'}p' = K_2 \frac{\partial}{\partial x'}\left(\mu' \frac{\partial}{\partial x'}u'\right) \tag{30.2}$$

$$\frac{d}{dt'}p' + \varkappa p' \frac{\partial}{\partial x'}u' = K_3 \frac{\partial}{\partial x'}\left(\lambda' \frac{\partial}{\partial x'}\frac{p'}{\varrho'}\right) + (\varkappa - 1)\frac{K_2}{K_1}\mu'\left(\frac{\partial}{\partial x'}u'\right)^2 \; , \tag{30.3}$$

worin neben dem Polytropenexponenten $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ drei weitere unabhängige dimensionslose Kennziffern auftreten:

(30.4) $K_1 = \frac{p_o}{\varrho_o u_o}$ $\qquad K_2 = \frac{\mu_o}{\varrho_o L u_o}$ $\qquad K_3 = \frac{\lambda_o}{\varrho_o L u_o c_v}$.

Stimmen Medien in diesen Kennziffern überein, so zeigen sie gleiches Strömungsverhalten (Reynolds'sches Ähnlichkeitstheorem, vgl. /41/). Hierauf beruht die Berechtigung der Strömungsversuche an Modellen und die Übertragung der dort gewonnenen Daten auf vorgegebene andere Ausmaße.

Gebräuchliche Kennzahlen, die das Strömungsverhalten beschreiben, sind:

(31.1) $Ma = \frac{u_o}{c_o}$ — Mach-Zahl, die mit der Kompressibilität zusammenhängt,

(31.2) $Re = \frac{\varrho_o u_o L}{\eta_o}$ — Reynolds-Zahl: Verhältnis von Trägheitskraft zu Zähigkeit,

(31.3) $Pe = \frac{\varrho_o u_o L c_p}{\lambda_o}$ — Péclet-Zahl: Verhältnis von Konvektionswärme zu Wärmeleitung.

In Abhängigkeit von der Größenordnung dieser Parameter für spezielle physikalische Verhältnisse sind Näherungsrechnungen möglich.

Die Transportkoeffizienten der inneren Reibung, Wärmeleitung und Selbst-Diffusion ermitteln sich aufgrund der elementaren Gaskinetik (vgl. z.B. Oertel /52/) zu:

(32.1) $\eta = \frac{1}{3} \varrho v_o L$ — (dynamische) Viskosität

(32.2) $\lambda = \eta c_v$ — Wärmeleitungszahl

(32.3) $D = \frac{1}{3} v_o L$ — Selbst-Diffusion .

Eine genauere Berechnung mit dem Modell der starren Kugeln (vgl. /13/) liefern für Viskosität η und Diffusionskoeffizienten D :

(33.1) $\eta = \frac{5\pi}{32} \varrho v_o L$ $\qquad D = \frac{3\pi}{16} v_o L$,

und für die Wärmeleitung λ ergibt sich mit der Eucken-Korrektur (vgl. z.B. Oertel /52/):

(33.2) $\lambda = (1 + \frac{9}{2n})\eta c_v = \frac{9\varkappa-5}{4}\eta c_v$
mit der Anzahl der Freiheitsgrade $n = \frac{2}{\varkappa-1}$.

Setzt man die Beziehungen aus (23) ein, so stellt man fest, daß η und λ lediglich Funktionen der Temperatur T sind:

(34.1) $\eta = \frac{5}{16Q}\sqrt{\pi mkT} = \eta(T)$.

Diese Unabhängigkeit von der Gasdichte ϱ steht in Übereinstimmung mit dem Experiment (vgl. /25/), während die genaue Abhängigkeit von der Temperatur nicht durch (34.1) beschrieben wird; dem tragen jedoch empirische Interpolationsformeln Rechnung: für den Stoßwirkungsquerschnitt

(34.2) $Q = \pi d^2(1 + \frac{C}{T})$ Sutherland-Korrektur (vgl./52/) ,

oder eine Temperaturabhängigkeit in der Form:

(34.3) $\eta = \eta_o(\frac{T}{T_o})^\gamma$ mit $0.5 \leq \gamma \leq 1$.

Dimensionslose Kennziffern, die den Zusammenhang der Transportgrößen beschreiben, sind die Prandtl-Zahl Pr , Schmidt-Zahl Sc und Lewis-Zahl Le mit $Pr = Sc \cdot Le = \frac{Pe}{Re}$:

(35.1) $Pr := \frac{\eta c_p}{\lambda} = \varkappa$ bzw. $Pr = \frac{4+2n}{9+2n}$

(35.2) $Sc := \frac{\eta}{\varrho D} = 1$ bzw. $Sc = \frac{5}{6}$

(35.3) $Le := \frac{\varrho c_p D}{\lambda} = \varkappa$ bzw. $Le = \frac{6}{5}\frac{4+2n}{9+2n}$.

Im Kapitel 4 werden wir sehen, daß die Konstanz dieser Zahlen für Knudsen-Gase erhalten bleibt, obwohl die Dichten-Unabhängigkeit dann nicht mehr gegeben ist.

Aufgrund der Dimensionsanalysis (30) stellen wir noch fest, daß wir bei Vernachlässigung von Reibung ($\eta \longrightarrow 0$) und Wärmeleitung ($\lambda \longrightarrow 0$) , deren Verhältnis über die Prandtl-Zahl (35.1) ja bekannt sein sollte, einen freien Parameter L übrig behalten und daher für Orte $\underline{x}$ und Zeiten t a priori keine absoluten Werte angeben können, wie es aufgrund des Differentialgleichungs-Charakters der Ausgangsgleichungen sein muß.

2. Die mathematische Struktur der gasdynamischen Gleichungen

In diesem Kapitel wird das System der instationären eindimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für ein kompressibles Gas unter mathematischen Gesichtspunkten untersucht. Dazu betrachten wir das Grundgleichungssystem in der konservativen Darstellung 1(5):

$$(1.1)\quad \rho_t + (\rho u)_x = 0$$

$$(1.2)\quad (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = (\mu u_x)_x \quad \text{mit} \quad \mu := \tfrac{4}{3}\eta + \eta'$$

$$(1.3)\quad e_t + (hu)_x = \left\{\mu\left(\frac{\lambda}{c_p \mu} i + \frac{1}{2}u^2\right)_x\right\}_x \equiv \left\{\frac{\lambda}{c_v}\left(\frac{e}{\rho}\right)_x + \left(\mu - \frac{\lambda}{c_v}\right)\left(\frac{u^2}{2}\right)_x\right\}_x$$

mit den Zustandsgleichungen eines perfekten Gases (vgl. Abschnitt 1.1):

$$(1.4)\quad e = \frac{p}{\varkappa - 1} + \frac{\rho}{2}u^2 = \rho\left(\varepsilon + \frac{u^2}{2}\right) \qquad h = e + p = \rho\left(i + \frac{u^2}{2}\right).$$

Diese Divergenzform der Gleichungen weist eine gemeinsame Struktur auf, die sich bei geeigneter Normierung der gasdynamischen Größen (vgl. Abschnitt 1.4) angeben läßt zu:

$$(2.1)\quad \frac{\partial}{\partial t}\underline{U} + \frac{\partial}{\partial x}\underline{F}(\underline{U}) = \mathrm{Re}^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial x}\underline{V}(\underline{U})\right\}$$

mit den Vektorfunktionen:

$$(2.2)\quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ (\varkappa - 1)e - \frac{\varkappa - 3}{2}\rho u^2 \\ \left(e - \frac{\varkappa - 1}{2}\rho u^2\right)u \end{pmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{pmatrix} 0 \\ u \\ \frac{i}{\mathrm{Pr}} + \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix},$$

worin für konkrete Rechnungen die Prandtl-Zahl $\mathrm{Pr} = O(1)$ und die Reynolds-Zahl $\mathrm{Re} \gg 1$ in Form empirischer Meßdaten gegeben sind.

Die Gleichungen der idealen Gasdynamik, die für den Grenzfall $\mathrm{Re} \longrightarrow \infty$ resultieren, lassen sich mathematisch als

System hyperbolischer Differentialgleichungen beschreiben.

Ausgehend von der Lax'schen Theorie zur Behandlung von Stoßwellenproblemen wird in diesem Kapitel kurz auf den Begriff der schwachen Lösungen eingegangen. Diese treten auf bei der Beschreibung von Strömungen mit diskontinuierlichen Verläufen wie Sprung- und Kontaktunstetigkeiten. Für den Fall glatter isentroper Strömungen werden die gasdynamischen Gleichungen mit Hilfe des Riemannschen Charakteristikenverfahrens gelöst: man findet dabei die nichtlinearen "einfachen Wellen". Als Sonderlösung dazu erweist sich die von Burgers angegebene Ähnlichkeitslösung.

An Hand eines einfachen mathematischen Beispiels wird schließlich die Entwicklung einer Stoßwelle dargestellt.

2.1 Lax'sche Theorie der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen

Bisher sind wir davon ausgegangen, daß die Strömungsgrößen stetig differenzierbar seien, so daß das System der integralen Erhaltungssätze 1(1) äquivalent zu dem System 1(5) der differentiellen Erhaltungsgleichungen ist.

Betrachten wir dazu ein Anfangswertproblem für eine einzelne Erhaltungsgleichung der Form (2.1) bei Vernachlässigung der Dissipationsterme (Re $\longrightarrow\infty$) :

$$(3.1)\quad U_t + F(U)_x = 0 \qquad \text{mit} \qquad U(x,o) = U_o(x)\ ,$$

dann gilt für jede beliebige glatte Funktion $\phi(x,t)$ mit kompaktem Träger ("Testfunktion"):

$$(3.2)\quad \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} dx(\phi_t U + \phi_x F) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \phi(x,o)U_o(x) = 0\ .$$

Diese beiden Beziehungen sind für stetig differenzierbare Lösungen U äquivalente Aussagen. Sehen wir nun von der Forderung glatter Lösungen ab, was wir z.B. bei unstetigen Anfangsverteilungen tun müssen, so ist die Differentialgleichung (3.1) in dieser Form nicht geeignet, wohl aber die Integralbeziehung (3.2), weil diese auch von Funktionen erfüllt werden kann, die lediglich beschränkt und meßbar

sind. Unter der schwachen Lösung des Problems (3.1) versteht man nun eine Funktion U, die für jede Testfunktion ϕ in der Halbebene mit $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ die Integralgleichung (3.2) erfüllt.

Dieses Konzept der schwachen Lösungen wollen wir dahingehend einschränken, daß wir uns zunächst für die Existenz stückweise stetig differenzierbarer schwacher Lösungen interessieren (im Hinblick auf Stoßwellenphänomene).

Gegeben sei eine Integralbeziehung der Form 1(1) bei festen Grenzen a und b:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b dx\, U(x,t) = F(a,t) - F(b,t) \quad . \tag{4}$$

$Y = Y(t)$ sei eine glatte Kurve, entlang derer $U(Y,t)$ unstetig ist und außerhalb derer U die Differentialgleichung (3.1) erfüllt (vgl. Abb. 1).

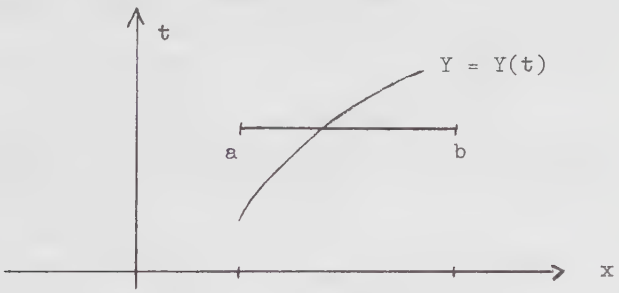


Abb. 1: Kurve der Unstetigkeit $Y = Y(t)$.

Der Integrationsweg läßt sich dann aufspalten

$$I(t) = \int_a^b dx\, U(x,t) = \int_a^Y dx\, U(x,t) + \int_Y^b dx\, U(x,t) \quad .$$

Die zeitliche Ableitung dieses Ausdruckes mit der Geschwindigkeit W der Unstetigkeit:

$$W = \frac{d}{dt} Y(t) = \dot{Y} \quad , \tag{5.1}$$

sowie den U-Werten an der Grenze U_l und U_r ergibt dann:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \int_a^Y U_t dx + U_l W + \int_Y^b U_t dx - U_r W \quad .$$

Einsetzen von (3.1) und Integration liefert:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b U(x,t)dx = F(a,t) - F(b,t) + W(U_l - U_r) - F_l + F_r \ .$$

Dieser Ausdruck stimmt aber mit der Integralbeziehung (4) nur dann überein, wenn an der Unstetigkeitsstelle Y die folgende Sprungbedingung erfüllt ist:

(5.2) $W(U_l - U_r) = F_l - F_r$, abgekürzt: $W\,[U] = [F]$.

Wie Lax u.a. (vgl. /37/, /24/, /63/) gezeigt haben, muß für eine stückweise glatte Lösung U zusätzlich noch eine sogenannte Entropiebedingung gelten:

(5.3) $A(U_l) \geq W \geq A(U_r)$ mit $A = \frac{\partial F}{\partial U} = A(U)$,

damit sie eindeutig durch ihre Anfangsbedingung bestimmt ist.

Offensichtlich sind die Bedingungen (5.2) und (5.3) für stetig differenzierbare Lösungen auf natürliche Weise erfüllt.

In Verallgemeinerung dieser Ideen auf Systeme von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen:

(6.1) $\underline{U}_t + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_x = 0$ mit $\underline{\underline{A}}(\underline{U}) = \frac{\partial}{\partial \underline{U}}\,\underline{F}(\underline{U})$,

worin die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}(\underline{U})$ n reelle und verschiedene Eigenwerte $a^i = a^i(\underline{U})$ besitzt, muß die Sprungbedingung von jedem der n Erhaltungssätze erfüllt werden:

(6.2) $W\,[U_j] = [F_j]$ $\qquad j = 1, \ldots, n$,

und die Entropiebedingung für solche Systeme besagt:

(6.3) $a^j(\underline{U}_l) \geq W \geq a^j(\underline{U}_r)$ $\qquad j = 1, \ldots, n$.

Das System der idealen gasdynamischen Gleichungen ((2) mit $Re \longrightarrow \infty$) erfüllt die mathematischen Voraussetzungen dieser Darstellung (vgl. Lax /37/; Chorin, Marsden /15/; Smoller /63/). Physikalisch bedeutet die Entropiebedingung, daß sich die schwache Lösung als Grenzfunktion der Lösung einer parabolischen Gleichung ergibt (vgl. (2)):

(7) $U_t + F(U)_x = \nu\left[\beta(U)U_x\right]_x$ mit $\beta(U) \geq 0$ und $\nu \longrightarrow 0+$.

Bei dieser Betrachtungsweise werden diejenigen mathematisch evtl. möglichen Lösungen des hyperbolischen Systems ausgeschlossen, die sich nicht als Grenzlösungen ($\nu \to 0+$) ergeben.

2.2 Die Stoßrelationen von Rankine-Hugoniot

Die Sprungbedingungen (6.2) zu dem System der hyperbolischen Erhaltungsgleichungen für die Variablen ϱ, $j = \varrho u$ und e (vgl. (1) bzw. (2) mit $Re \longrightarrow \infty$) $\underline{U}_t + \underline{F}(\underline{U})_x = 0$ der Vektorvariablen:

(8) $$\underline{U} = \begin{pmatrix} \varrho \\ \varrho u \\ e \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \underline{F} = \begin{pmatrix} \varrho u \\ p+\varrho u^2 \\ hu \end{pmatrix}$$

mit den Umrechnungen gemäß (1.4): $e = \frac{p}{\varkappa-1} + \frac{\varrho}{2} u^2$, $h = e+p$ sind in der Gasdynamik bekannt als Rankine-Hugoniot-Bedingungen für Stoßwellen (vgl. z.B. E.Becker /1/, R.Becker /2/):

(9.1) $W[\varrho] = [\varrho u]$ $\qquad \varrho_l w_l = \varrho_r w_r =: B$

(9.2) $W[\varrho u] = [p+\varrho u^2]$ $\qquad p_l + \varrho_l w_l^2 = p_r + \varrho_r w_r^2 =: J$

(9.3) $W[e] = [hu]$ $\qquad h_l w_l = h_r w_r =: E$

als Relationen zwischen den Größen rechts und links einer Stoßfront mit der Relativ-Geschwindigkeit $w := |u-W|$ und der damit transformierten Enthalpie $h = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} p + \frac{\varrho}{2} w^2$.

Löst man dieses System explizit mit Hilfe der Definition der Mach-Zahl M für eine Stoßwelle in ein ruhendes Gas (Index o), so erhält man mit $p = p^*$ und $w_o = u_o - W > 0$ und $\varkappa p_o = \varrho_o c_o^2$ mittels

$$M := \frac{w_o}{c_o} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa} \frac{p}{p_o} + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \qquad > 1$$

die Stoßrelationen für die einzelnen gasdynamischen Größen (vgl. E.Becker /1/; Whitham /70/; Oertel /52/):

(10.1) $$\frac{p^*}{p_o} = 1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1)$$

(10.2) $$\frac{\varrho_o}{\varrho^*} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}(1-M^{-2})$$

(10.3) $$u^* = u_o - \frac{2 c_o}{\varkappa+1}(M-M^{-1})$$

(10.4) $$c^* = c_o \sqrt{1 + 2\frac{\varkappa-1}{(\varkappa+1)^2}(\varkappa M^2+1)(1-M^{-2})}$$

(10.5) $$s^* = s_o + \frac{R}{\varkappa-1}\left\{\ln\left[1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1)\right] + \varkappa \ln\left[\frac{(\varkappa-1)M^2+2}{(\varkappa+1)M^2}\right]\right\}$$

Bemerkung: Bei der Auswahl der Gleichungen für die schwachen Lösungen muß auf eine korrekte Wahl geachtet werden mit Rücksicht auf die physikalischen Größen, die beim Durchgang der Stoßwelle erhalten bleiben. Wählt man nämlich z.B. statt der Energiegleichung die entsprechende Gleichung für die Entropiedichte 1(10.1) $s_t + us_x = 0$ und koppelt diese mit der Kontinuitätsgleichung (1.1), so erhält man ebenfalls eine Gleichung in konservativer Form (vgl. 1(22)):

(11) $$(\varrho s)_t + (\varrho s \cdot u)_x = 0 \quad ,$$

und die zugehörige Sprungbedingung hierzu wäre nach (6.2) bzw. (9): $\varrho_l s_l w_l = \varrho_r s_r w_r$, und wegen (9.1): $\varrho_l w_l = \varrho_r w_r$ müßte dann gelten: $s_l = s_r$, was bedeuten würde, daß die Entropiedichte s eine Erhaltungsgröße sei. Dies aber steht im Widerspruch zu (10.5), wenn gilt: $M > 1$.

Das System (8) liefert dabei genau die mit der experimentellen Erfahrung übereinstimmenden (und daher als physikalisch korrekt zu bezeichnenden) Stoßrelationen. Außerhalb der Stoßzonen liegen glatte Lösungen vor, und die Beziehungen aus (11) können wieder Gültigkeit haben.

Berücksichtigt man andererseits in den Gleichungen Reibung und Wärmeleitung, so sind in einer Gasströmung zwar steile Gradienten, jedoch stetige Übergänge zu erwarten, und die physikalisch relevanten hyperbolischen Lösungen nach (8) sollten sich als Grenzlösungen aus einem der Gleichungssysteme mit Dissipation ergeben (vgl. (2)).

Z.B. im Falle stationärer Lösungen lassen sich mittels der Galilei-Transformation:

(12) $$\xi = x - Wt \qquad w := u - W = w(\xi) \qquad ' := \frac{d}{d\xi}$$

die Rankine-Hugoniot-Bedingungen auch für dissipative Verhältnisse angeben (vgl. (9)):

(13) $$\varrho w = B \qquad \mu w' = p + \varrho w^2 - J$$
$$\frac{\lambda}{c_v}\varepsilon' + \mu w w' = hw - E \quad ,$$

womit bei Ersetzung von $\varrho = \frac{B}{w}$, $p = (\varkappa - 1)\varrho\varepsilon$ und $h = \varrho(\varkappa\varepsilon + \frac{1}{2}w^2)$ zwei (gewöhnliche) Differentialgleichungen

für $\varepsilon = \varepsilon(\xi)$ und $w = w(\xi)$ resultieren:

(14.1) $\frac{\mu}{B} w w' = (\varkappa - 1)\varepsilon - w(w - \frac{J}{B})$

(14.2) $\frac{\lambda}{B c_v} \varepsilon' = \varepsilon - \frac{1}{2}\{(\frac{J}{B} - w)^2 - (\frac{J}{B})^2\} - \frac{E}{B}$

bzw. eine Gleichung für $\varepsilon = \varepsilon(w)$, die man durch Quotientenbildung erhält, oder eine Gleichung für $w = w(\xi)$, wenn man ε aus (14.1) in (14.2) einsetzt.

Bei Kenntnis der Transportkoeffizienten μ und λ ist eine vollständige Lösung dieser Gleichungen möglich, und man erhält daraus Aufschlüsse über die Struktur der Stoßwellenfront.

Eine Sonderlösung (vgl. R.Becker /2/, /73/) ergibt sich bei Setzung:

(15) $\lambda = c_p \mu$ bzw. $Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{3}{4}$,

denn dann gilt in (13) gerade: $\mu(hw)' = hw - E$ mit der allgemeinen Lösung: $hw = E + \text{const} \cdot \exp(\frac{\xi}{\mu})$, und die einzige nicht divergierende Lösung bei unbeschränktem ξ ist gegeben durch: $hw = E$, ein Ergebnis, das aus dem dissipationsfreien Fall schon bekannt ist (vgl. (9.3)).

Bzgl. eingehenderer Untersuchungen verschiedener Spezialfälle vgl. z.B. R.Becker /2/, Zel'dovich & Raizer /73/.

2.3 Charakteristiken-Methode und die Riemann'sche Lösung der "einfachen Wellen"

Für den Fall dissipationsfreier isentroper Verhältnisse hat Riemann schon 1860 die gasdynamischen Gleichungen im eindimensionalen Fall durch Vertauschung der abhängigen mit den unabhängigen Variablen gelöst.

Dazu gehen wir von einem Gleichungssystem der Form (8) aus:

(16.1) $\underline{U}_t + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_x = 0$ mit $\underline{U}(x,o) = \underline{U}^{(o)}(x)$,

worin die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ im Vergleich zu (8) gegeben ist durch die Ableitungsmatrix des Flußvektors $\underline{F}$

nach dem Lösungsvektor $\underline{U}$:

(16.2) $$\underline{\underline{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{U}} \underline{F}(\underline{U})\right)^{tr} = \underline{\underline{A}}(\underline{U}) \ .$$

Bei einer Parametrisierung $t = t(\tau)$ und $x = x(\tau)$ gilt für das von Riemann hierzu entwickelte Charakteristikenverfahren:

(17) $$\frac{dt}{d\tau} = 1 \qquad \frac{dx}{d\tau} = a^i \qquad \frac{d}{d\tau} \underline{U} = 0 \ ,$$

worin $a^i = a^i(x,t,\underline{U})$ die Eigenwerte zur Matrix $\underline{\underline{A}}$ bedeuten; ist $\underline{\underline{A}}$ eine n-dimensionale Matrix, so gehören zu diesem System n Charakteristiken durch jeden Punkt (x,t) .

Zu lösen ist folglich ein Eigenwert-Problem der Form:

(18) $$\underline{\underline{A}}^{tr} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{U}} \Gamma = a \frac{\partial}{\partial \underline{U}} \Gamma \ ,$$

worin die sogenannte Riemann'sche Invariante Γ konstant ist längs der zugehörigen Charakteristik.

Betrachten wir speziell das System mit den Variablen der lokalen Schallgeschwindigkeit c , der Strömungsgeschwindigkeit u und der Entropiedichte s , so läßt sich dies (vgl. 1(11)) vektoriell in der Form (16.1) schreiben:

(19.1) $$\begin{pmatrix} c \\ u \\ s \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \frac{\varkappa-1}{2} c & 0 \\ \frac{2}{\varkappa-1} c & u & -\frac{c^2}{\varkappa R} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ u \\ s \end{pmatrix}_x = 0 \ ,$$

und die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ sind gegeben durch:

(19.2) $$a^{1;2} = u \pm c \qquad a^3 = u \ .$$

Diese Eigenwerte sind reell und verschieden; man spricht bei (19) deshalb von einem hyperbolischen Differentialgleichungssystem (vgl. Abschnitt 2.1).

Wir betrachten hier nur den isentropen Fall $s = \text{const}$, dann liegen nur zwei Charakteristiken vor und die beiden Eigenwerte: $a^{\pm} = u \pm c$.

Die zu lösende Eigenwert-Gleichung (18) ist in diesem Fall mit $\underline{U} = \begin{pmatrix} c \\ u \end{pmatrix}$:

(20.1) $$\begin{pmatrix} u & \frac{2}{\varkappa-1}c \\ \frac{\varkappa-1}{2}c & u \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{U}} \Gamma^{\pm} = a^{\pm} \frac{\partial}{\partial \underline{U}} \Gamma^{\pm} ,$$

und wir erhalten die Eigenvektoren $\frac{\partial}{\partial \underline{U}} \Gamma^{\pm} = \begin{pmatrix} \pm \frac{2}{\varkappa-1} \\ 1 \end{pmatrix}$,

sowie die Riemann'schen Invarianten:

(20.2) $$\Gamma^{\pm} = u \pm \frac{2}{\varkappa-1}c ,$$

welche sich in dem Sonderfall $c = c(u)$ als Konstanten erweisen.

Mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens (17) läßt sich dann auch die verbleibende nichtlineare Gleichung:

(21.1) $u_t + (u \pm c)u_x = 0$ bzw. $c_t + (u \pm c)c_x = 0$

mit Hilfe der Charakteristik ξ lösen:

(21.2) $x = \xi + (u \pm c)t$ und $u = f(\xi)$

bzw. bei Vorliegen eines Anfangswertproblems mit $u(x,o) = f(x)$:

(21.3) $u(x,t) = f(x - a^{\pm}t)$ mit $a^{\pm} = u \pm c$,

worin nach (20) gilt:

(21.4) $a^{\pm} = u \pm c = \frac{\varkappa+1}{2}u - \frac{\varkappa-1}{2}\Gamma^{\mp} = \frac{\varkappa+1}{2}u \pm c_o$.

Mit der Lösung $u = u(x,t)$ und $c = c(u)$ sind damit auch die übrigen thermodynamischen Größen Massendichte ϱ und Druck p :

(21.5) $\varrho = \varrho_o(\frac{c}{c_o})^{\frac{2}{\varkappa-1}}$ und $p = p_o(\frac{c}{c_o})^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}$

bekannt, und diese Lösungen werden allgemein als einfache Wellen bezeichnet.

Bzgl. allgemeiner Anwendungen dieser Gleichungen vgl. E.Becker /1/, Landau & Lifschitz /34/, Oswatitsch /53/.

2.4 Die Ähnlichkeitslösung von Burgers

Die nichtlineare Entwicklungsgleichung (21.4) der Strömungsgeschwindigkeit u :

(22.1) $u_t + (\frac{\varkappa+1}{2}u - \frac{\varkappa-1}{2}\Gamma^{\mp})u_x = 0$ mit $u(x,o) = f(x)$

läßt sich durch die Substitution:

(22.2) $x' = x - \frac{\varkappa-1}{2}\Gamma^{\mp} \cdot t$ und $\vartheta := \frac{\varkappa+1}{2}u$

vereinfachen und führt auf eine Differentialgleichung vom Typ:

(23.1) $\vartheta_t + \vartheta\vartheta_x = 0$ $(x \longrightarrow x')$.

Diese Gleichung besitzt neben der trivialen Lösung $\vartheta = \text{const}$ und der Riemann'schen (impliziten) Lösung für ein Anfangswertproblem:

(23.2) $\vartheta(x,t) = f(x - \vartheta t)$,

die man dann als "weiche Lösung" (englisch: soft solution) bezeichnet, auch eine Ähnlichkeitslösung:

(23.3) $\vartheta(x,t) = \frac{x}{t}$ (allgemeiner: $\vartheta(x,t) = \frac{x-x_o}{t-t_o}$) .

Man erhält diese Lösung, wenn man nach Burgers /6/ (vgl. auch Wenk /69/) den speziellen Ähnlichkeitsansatz $\vartheta = \vartheta(z)$ wählt mit:

(24) $z = \frac{x}{t}$: $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{d}{dz}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{t}\frac{d}{dz}$.

Rücktransformation gemäß (22.2) führt auf die expliziten Lösungen:

(25.1) $u(x,t) = \frac{2}{\varkappa+1}(\frac{x}{t} \pm c_o)$ Strömungsgeschwindigkeit

(25.2) $c(x,t) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(\mp\frac{x}{t} + \frac{2c_o}{\varkappa+1})$ Schallgeschwindigkeit

(25.3) $u \mp c = \frac{x}{t}$.

Man erhält die Burgers'sche Ähnlichkeitslösung auch als Sonderfall zu den einfachen Wellen, wenn man in (21.2) $\varsigma \longrightarrow o$ und $\Gamma^{\pm} = u_o \pm \frac{2}{\varkappa-1}c_o$ mit $u_o = 0$ setzt.

Speziell liefert diese Lösung (vgl. Abb. 2 , daß die maxi-

male Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Expansionsströmung ins Vakuum ($c = o$) gegeben ist durch:

(25.4) $$u_{max} = z_{max} = \frac{2}{\varkappa-1} c_o \quad ,$$

während die sogenannte Expansionskante mit der Schallgeschwindigkeit c_o des ungestörten Gases in den ruhenden Teil ($u_o = o$) hineinläuft:

(25.5) $$u_{min} = 0 \quad \text{für} \quad z_{min} = - c_o \quad .$$

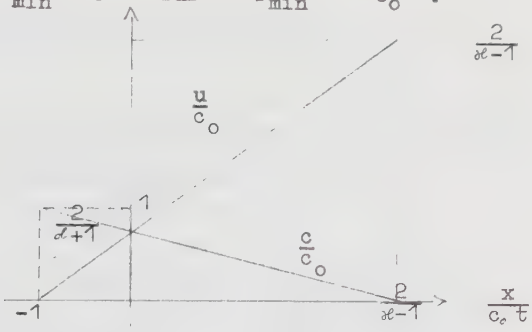


Abb.2 : Burgers'sche Ähnlichkeitslösung

Die Burgers'sche Lösung ist aufgrund ihrer Singularität bei $t = o$ nicht geeignet, ein allgemeines Anfangswertproblem mit $u(x,o) = f(x)$ zu beschreiben.

Dies leistet aber die schwache Lösung zu (23.1), die wir erhalten, wenn wir zu dieser Gleichung einen künstlichen Viskositätsterm hinzufügen (vgl. (7)):

(26) $$v_t + v v_x = \nu \{\beta(v) v_x\}_x \quad \text{mit} \quad \beta(v) \geqslant 0$$

und in der Lösung zum Grenzfall $\nu \longrightarrow 0+$ übergehen.

2.5 Die nichtlineare Diffusionsgleichung von Burgers

Die sogenannte Burgers-Gleichung:

(27.1) $$v_t + v v_x = \nu v_{xx}$$

mit der Anfangsverteilung

(27.2) $$v(x,o) = f(x)$$

bildet ein Anfangswertproblem zu einer nichtlinearen Diffu-

sionsgleichung, die sowohl Konvektion als auch Diffusion beinhaltet. Sie wurde erstmals von Burgers /8/ als einfaches eindimensionales Modell der Navier-Stokes-Gleichung in der statistischen Theorie der freien Turbulenz betrachtet.

Vermöge der Cole-Hopf'schen Transformation (Hopf /28/ 1950: Cole 1951):

$$(27.3) \qquad \vartheta(x,t) = -2\nu\{\ln \varphi(x,t)\}_x$$

läßt sie sich in eine einfache Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung:

$$(27.4) \quad \varphi_t = \nu\,\varphi_{xx} \quad \text{mit} \quad \varphi(x,o) = \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\int_o^x f(x')dx'\right\}$$

überführen. Da deren Grundlösung (Greensche Funktion) bekannt ist, steht der Burgers-Gleichung trotz ihrer Nichtlinearität die Lösungsmannigfaltigkeit der linearen Wärmeleitungsgleichung zur Verfügung:

$$(27.5) \quad \varphi(x,t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\nu t}}\int_{\mathbb{R}} dx' \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t} - \frac{1}{2\nu}\int_o^{x'} f(x'')dx''\right\} .$$

Äquivalente Darstellungen der Lösung des Anfangswertproblems (27) sind:

$$(28.1) \quad \vartheta(x,t) = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\int_{\mathbb{R}} dx' \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\,g(x';x,t)\right\}$$

$$(28.2) \quad \vartheta(x,t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} dx' \frac{x-x'}{t}\exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\,g(x';x,t)\right\}}{\int_{\mathbb{R}} dx' \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\,g(x';x,t)\right\}}$$

$$(28.3) \quad \vartheta(x,t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} dx' f(x') \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\,g(x';x,t)\right\}}{\int_{\mathbb{R}} dx' \exp\left\{-\frac{1}{2\nu}\,g(x';x,t)\right\}}$$

mit

$$g(x';x,t) := \frac{(x-x')^2}{2t} + \int_o^{x'} f(x'')dx'' .$$

Hieraus lassen sich einige Folgerungen ziehen:

1.) Wie bei Hopf /28/ gezeigt ist, gilt allgemein:

$$(29) \qquad \lim_{\nu\to o+} \vartheta(x,t) = \vartheta_o(x,t) ,$$

wenn ϑ_o die Lösung der "nicht-viskosen" Gleichung (23.1) ist.

2.) Die Lösungsform (28.2):

$$x = \vartheta t + \frac{\int dx'\ x' \exp\{-\frac{1}{2\nu} g(x';x,t)\}}{\int_{\mathbb{R}} dx' \exp\{-\frac{1}{2\nu} g(x';x,t)\}}$$

zeigt dabei den Zusammenhang mit der Riemannschen Lösung (21): $x = \vartheta t + \xi$ mit $\xi = \langle x \rangle$

und mit der Burgers'schen Ähnlichkeitslösung $z = \frac{x}{t}$, die sich bei beschränktem ξ als asymptotische Lösung $(t \longrightarrow \infty)$ einstellt.

3.) Für "kleine" Anfangsverteilungen erhält man wegen:

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\exp\{-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}\}}{\sqrt{4\pi\nu t}} = \delta(x-x')$$

aus (28.3) die Lösung einer einfachen Diffusionsgleichung:

$$\vartheta(x,t) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{dx'}{\sqrt{4\pi\nu t}} f(x') \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\nu t}\right] ,$$

die sich auch bei Linearisierung der Burgers-Gleichung (27.1) ergibt.

4.) Mit Hilfe der Substitution

$$x \longrightarrow x + \frac{\varkappa-1}{2}\Gamma\mp t \qquad \text{und} \qquad \vartheta = \frac{\varkappa+1}{2} u$$

löst (28) die (um einen Viskositätsterm erweiterte) Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit u :

(30) $\quad u_t + (\frac{\varkappa+1}{2} u - \frac{\varkappa-1}{2}\Gamma\mp) u_x = \nu u_{xx}$

2.6 Mathematisches Beispiel einer Stoßwellenlösung

An Hand eines einfachen Beispiels mit unstetiger Anfangsverteilung für ϑ betrachten wir die schwache Lösung des Problems (in normierten Einheiten):

(31.1) $\quad \vartheta_t + \vartheta\vartheta_x = 0$

(31.2) $\quad \vartheta(x,o) = f(x) := \theta(-x) = 1 - \theta(x)$.

Die Auswertung der "weichen Lösung" mit $\vartheta = f(x-\vartheta t)$

und deren Veranschaulichung mit Hilfe der Charakteristiken (Abb. 3) gibt für die Bereiche:

(32.1) $x > t$ ($\vartheta = o$) und $x < o$ ($\vartheta = 1$) : eindeutige Lösungen, während für den Bereich

(32.2) $o < x < t$: doppeldeutige Lösungen

vorliegen.

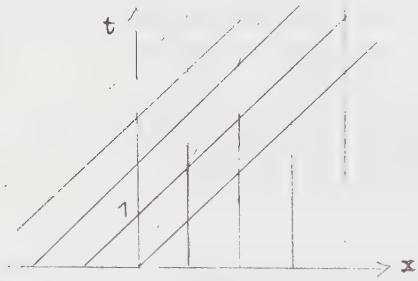


Abb. 3: Charakteristiken

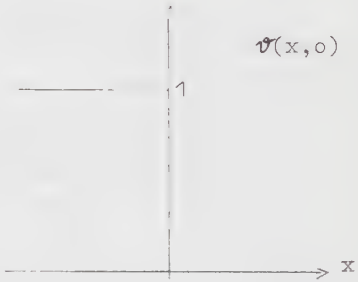


Abb. 4: Anfangsverteilung

Wir konstruieren einen stetigen Übergang der Form:

$$(33)\qquad f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \leqq o \\ 1-nx & \text{für} \quad o \leqq nx \leqq 1 \\ o & \text{für} \quad 1 \leqq nx \end{cases} .$$

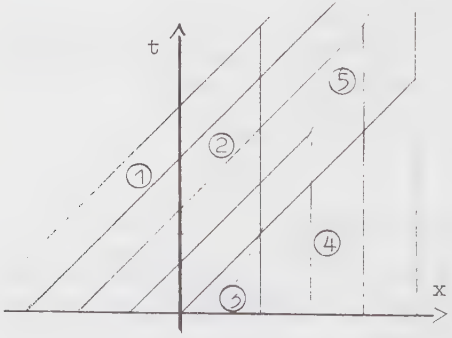


Abb. 5: Charakteristiken zu (33)

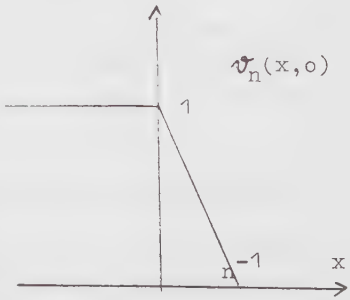


Abb. 6a: Anfangsverteilung

Für diese Anfangsverteilung erhält man damit eindeutige Lösungen für die Bereiche:

(34)
① $x \leq 0$: $\vartheta = 1$

② $x \leq 1/n$, $t \geq x$: $\vartheta = 1$

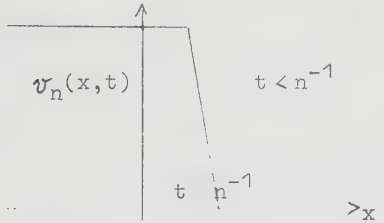
③ $t \leq x \leq 1/n$: $\vartheta = \frac{1-nx}{1-nt}$ Ähnlichkeitslösung

④ $x \geq 1/n$, $t \geq 1/n$: $\vartheta = 0$

⑤ $t \leq x \leq 1/n$: $\vartheta = 1 - \theta(x - \frac{t+n^{-1}}{2})$

Stoßwellenlösung mit: $Y(t) = \frac{t+n^{-1}}{2}$ und $W = \frac{d}{dt} Y = \frac{1}{2}$.

In der zeitlichen Entwicklung sieht dies so aus:



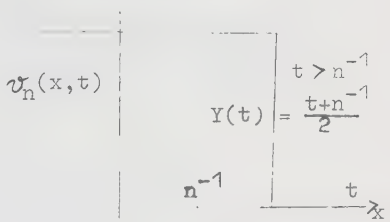


Abb. 6b: Zeitverlauf $t < n^{-1}$ Abb. 6c: $t > n^{-1}$

Im Grenzfall gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, die Bereiche ② und ③ entfallen, und man erhält die schwache Lösung:

(35.1) $\vartheta(x,t) = 1 - \theta(x - \frac{1}{2} t) = \theta(t/2 - x)$.

Diese Lösung erfüllt die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung (5.1) mit:

(35.2) $W = \frac{1}{2} \frac{\vartheta_l^2 - \vartheta_r^2}{\vartheta_l - \vartheta_r} = \frac{1}{2}(\vartheta_l + \vartheta_r) = \frac{1}{2}$

und die Lax'sche Entropiebedingung (5.2):

(35.3) $\vartheta_l \geq W \geq \vartheta_r$.

Im Vergleich zu dieser konstruierten Lösung betrachten wir schließlich die schwache Lösung aufgrund der Burgers-Gleichung (gemäß Abschnitt 2.5).

Eine exakte Lösung dieser Gleichung zur Anfangsverteilung (31.2) erhält man durch Auswertung der Lösungsform (28.3):

(36.1) $\vartheta_\nu(x,t) = \left\{ 1 + \exp\left(\frac{x - \frac{1}{2}t}{2\nu}\right) \cdot \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}\right)}{\operatorname{erfc}\left(\frac{x-t}{2\sqrt{\nu t}}\right)} \right\}^{-1}$;

sie stellt eine Stoßwelle dar, die sich längs der x-Achse mit einer Stoßfront-Geschwindigkeit $W = \frac{1}{2}$ ausbreitet. Die Breite der Stoßfront ist abhängig von der Wahl des Parameters ν und verschwindet im Grenzfall $\nu \longrightarrow 0+$.

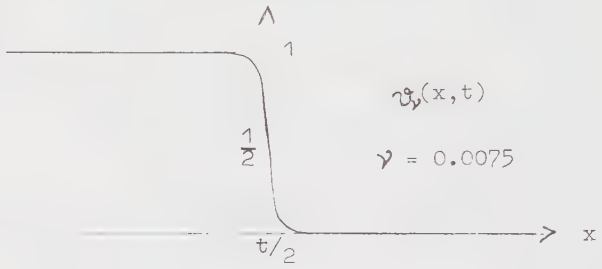


Abb. 7: Lösung der Burgers-Gleichung

Lösung (36.1) geht bei hinreichend großem t asymptotisch in die stationäre Lösung der Burgers-Gleichung (vgl. Whitham /70/) über:

$$(36.2)\quad \vartheta(x,t) = \left\{1 + \exp\left(\frac{x - \frac{1}{2}t}{2\nu}\right)\right\}^{-1} = \frac{1}{2}\left\{1 + \tanh\left(-\frac{x - \frac{1}{2}t}{4\nu}\right)\right\} ,$$

wodurch eine Welle beschrieben wird, die sich ohne Deformation mit der konstanten Geschwindigkeit $W = \frac{1}{2}$ verschiebt. Sie stellt eine Stoßwelle vom Sprung $\Delta\vartheta = 1$ und der Breite der Übergangsregion

$$\delta := \frac{\Delta\vartheta}{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{max}} = 2\nu \qquad \text{mit} \qquad \lim_{\nu \to 0+} \delta = 0$$

dar.

In den folgenden beiden Kapiteln zeigt sich die physikalische Bedeutung der Burgers-Gleichung, die wir im 3. Kapitel als Näherung zur Navier-Stokes-Gleichung erhalten und die im 4. Kapitel als exakte Gleichung für die (Zeit-transformierte) Strömungsgeschwindigkeit aus der stoßfreien Boltzmann-Gleichung abgeleitet wird.

3. Näherungsverfahren zur Lösung der eindimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Gase

In diesem Kapitel werden für den eindimensionalen Fall die instationären nichtlinearen Wellenlösungen der gasdynamischen Gleichungen bei Berücksichtigung von Reibungs- und Wärmeleitungseffekten (vgl. 2(2)) näherungsweise untersucht:

$$(1) \quad \underline{U}_t + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_x = Re^{-1}\left(\underline{\underline{V}}(\underline{U})_x \right)_x \longrightarrow \underline{\underline{R}} \cdot \underline{U}_{xx}$$

Hierdurch wollen wir in Bezug auf ein Anfangswertproblem Aufschlüsse über grundlegende qualitative Gesetzmäßigkeiten bei der zeitlichen Entwicklung der auftretenden nichtlinearen Wellen gewinnen.

3.1 Vorbemerkungen zur Näherung

Wir beginnen mit der Lösung der linearisierten Gleichungen, von der angenommen wird, daß sie als erster Term einer asymptotischen Entwicklung bzgl. der Reynolds-Zahl Re (vgl. Abschnitt 1.4) dienen kann. Dazu ist im Hinblick auf ein systematisches Entwicklungsverfahren zur allgemeinen Lösung der nichtlinearen Gleichungen zu bemerken, daß die lineare Näherung sicherlich nur sinnvoll ist, glatte Lösungen geeignet zu approximieren, während die typisch nichtlinearen Effekte, wie sie bei Stoßwellen mit dem Aufsteilen von Fronten auftreten, unterdrückt werden. Eine quadratisch-nichtlineare Näherung sollte jedoch in die Richtung der zu erwartenden Effekte weisen.

Diese Approximation 2. Ordnung ist ebenfalls in Bezug auf die numerischen Verfahren des Kapitels 6 von Bedeutung, da sich dort zur Beschreibung von Stoßwellenphänomenen solche von 2. Ordnung sinnvoll anbieten. Die zur numerischen Stabilität der Verfahren benutzten Hilfsterme künstlicher Viskosität (vgl. Abschnitt 2.1) können hier physikalisch motiviert werden.

Die Grundgleichungen, die wir für unsere Untersuchungen be-

nutzen wollen, sind die eindimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Gase, wie z.B. durch das System 1(11) gegeben sind. Diese Gleichungen seien bzgl. der Dissipationsterme eingeschränkt auf nichtlineare Glieder 2. Ordnung, wobei die Koeffizienten der inneren Reibung und der Wärmeleitung als konstant und klein von 1. Ordnung vorausgesetzt werden. Da die Entropieänderung eine Größe 2. Ordnung ist, bleibt deren Einfluß berücksichtigt:

$$(2) \qquad \varrho T \frac{ds}{dt} = (\lambda T_x)_x + \mu u_x^2 \longrightarrow \lambda T_{xx} \ .$$

Das zugrundeliegende Gleichungssystem ist dann gegeben durch:

$$(3.1) \quad \varrho_t + u\varrho_x + \varrho u_x = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$(3.2) \quad u_t + uu_x + \varrho^{-1} p_x = \mu^* u_{xx} \qquad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$(3.3) \quad p_t + up_x + \varkappa p u_x = \beta^* p_{xx} \qquad \text{Energiegleichung}$$

für Massendichte ϱ , Strömungsgeschwindigkeit u und Druck p sowie den Parameter der Reibung (Viskosität) und der Wärmeleitung

$$\mu^* := \frac{\mu}{\varrho_0} \qquad\qquad \beta^* := (\varkappa - 1)\frac{\lambda}{\varrho_0 c_p} \ .$$

An die Stelle der Gleichung (3.3) für den Druck p kann auch die entsprechende Gleichung für die lokale Schallgeschwindigkeit c treten:

$$(3.3)' \quad c_t + uc_x + \frac{\varkappa - 1}{2} c u_x = \lambda^* c_{xx} \quad \text{mit} \quad \lambda^* := \frac{\lambda}{\varrho_0 c_v} \ .$$

Dieses System läßt sich vektoriell darstellen in der Form:

$$(4.1) \qquad \underline{U}_t + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{U}_x = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{U}_{xx}$$

mit dem Lösungsvektor $\underline{U}$ und den Matrizen $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{R}}$:

$$(4.2) \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \varrho \\ u \\ c \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} u & \varrho & 0 \\ \frac{c^2}{\varkappa \varrho} & u & \frac{2c}{\varkappa} \\ 0 & \frac{\varkappa - 1}{2} c & u \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{R}} = \frac{\mu}{\varrho_0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{\mu c_v} \end{pmatrix} ,$$

worin die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ die nach Abschnitt 2.3 bekannten Eigenwerte a^j besitzt: $a^{1;2} = u \pm c$, $a^3 = u$.

3.2 Lösung der linearisierten gasdynamischen Gleichungen mit Dämpfung

Beim Vorgang der Linearisierung der Gleichungen werden die nichtlinearen Konvektionsterme gegenüber den Dissipationstermen vernachlässigt:

$$uu_x \ll \mu^* u_{xx} \quad .$$

Aufgrund der Dimensionsanalysis des Abschnitts 1.4 ist die zugehörige Kennziffer gegeben durch $Re^* := \frac{\varrho_o c_o L}{\mu_o}$, wobei die Geschwindigkeit bzgl. der Schallgeschwindigkeit c_o normiert sei. Die Gültigkeit der Linearisierung ist deshalb eine Frage des zugrundeliegenden Längenmaßstabs L bzw. der entsprechenden Zeit $t_o = \frac{L}{c_o}$ $(Re^* \approx \frac{p_o}{\mu_o} t_o)$.

Hieraus folgt z.B., daß in unmittelbarer Nachbarschaft einer Unstetigkeitsstelle die Dissipationsterme von größerer Bedeutung als die Konvektionsterme sein können.

Wie in Anhang 8.2 ausgeführt, ist das linearisierte System (4) vollständig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ symmetrisch ist. Dies läßt sich durch geeignete Normierung der Größen erreichen. Als besonders einfach erweisen sich die Gleichungen für u und p, die für sich schon ein selbstkonsistentes System bilden:

$$u_t + \varrho_o^{-1} p_x = \mu^* u_{xx} \tag{5.1}$$

$$p_t + \varkappa p_o u_x = \beta^* p_{xx} \tag{5.2}$$

mit den Eigenwerten $a^{1;2} = \pm c_o$ (vgl. (4): $|u| \ll c_o$).

Das normierte System erfüllt die Voraussetzungen des in 8.2 beschriebenen Verfahrens mit:

$$\underline{\underline{A}}^{(o)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} \mu^* & 0 \\ 0 & \beta^* \end{pmatrix} . \tag{5.3}$$

Mit den Dämfpungskoeffizienten:

$$\varsigma := \tfrac{1}{2}(\mu^* - \beta^*) \quad \text{und} \quad \nu := \tfrac{1}{2}(\mu^* + \beta^*) \tag{5.4}$$

erhalten wir nach 8.2 die Eigenwerte d^j :

$$d^{1;2} = ik \left\{ \pm \sqrt{1 - (\varsigma k)^2} + i\nu k \right\} \tag{5.5}$$

und für die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{b}^j$:

(5.6) $\qquad b_1^{1;2} = \pm\sqrt{1-(\zeta k)^2}$ und $\qquad b_2^{1;2} = 1$.

Diese Ergebnisse in die Lösungsform 8(2.3):

$$(6)\qquad \underline{\underline{G}}(x,t) = \sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{R}}\frac{dk}{2\pi}\exp\left[-ikx + d^j t\,\frac{\underline{b}^j\underline{b}^j}{|\underline{b}^j|^2}\right]$$

eingesetzt, liefern eine explizite Darstellung der linearen Lösung, die zumindest numerisch ausgewertet werden kann.

Eine Sonderlösung für den Fall $\mu = \beta$, d.h. für die Prandtl-Zahl $Pr = \frac{3}{4}(\varkappa-1)$, oder als Näherungslösung bei Reihenentwicklung bzgl. der Dämpfungsterme mit ν und ζ , erhält man für die Greensche Funktion explizit:

$$(7.1)\quad \underline{\underline{G}}(x,t) = \frac{\exp\left\{-\frac{(x-c_o t)^2}{4\nu t}\right\}}{\sqrt{4\pi\nu t}}\,\frac{\underline{b}^1\underline{b}^1}{|\underline{b}^1|^2} + \frac{\exp\left\{-\frac{(x+c_o t)^2}{4\nu t}\right\}}{\sqrt{4\pi\nu t}}\,\frac{\underline{b}^2\underline{b}^2}{|\underline{b}^2|^2}$$

mit dem kinematischen Dissipationskoeffizienten ν als Dämpfungsparameter:

$$(7.2)\qquad \nu = \frac{1}{2\varrho_o}\left\{\frac{4}{3}\eta + \eta' + \left(\frac{1}{c_v}-\frac{1}{c_p}\right)\lambda\right\} .$$

Für ein Anfangswertproblem der Art:

(8.1) $\quad u(x,o) = 0 \qquad p = p_r + \Delta p\,\theta(-x) \quad$ mit $\quad \Delta p = p_o - p_r$

ergibt sich der Lösungsvektor $\underline{U}$ (vgl. Anhang 8.2) zu:

$$(8.2)\qquad \underline{U}(x,t) = \frac{\Delta p}{2p_o}\left\{\Phi\left(\frac{x+c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \Phi\left(\frac{x-c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

mit den Funktionen (vgl. Anhang 8.3):

$$(8.3)\quad \Phi\left(\frac{x\pm c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{x} dx'\exp\left\{-\frac{(x'-c_o t)^2}{4\nu t}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1-\operatorname{erf}\left(\frac{x\pm c_o t}{2\sqrt{\nu t}}\right)\right\},$$

welche im Grenzfall $\nu \longrightarrow 0+$ in die Heavisidesche Sprungfunktion θ übergehen:

$$(8.4)\qquad \lim_{\nu\to 0+}\Phi\left(\frac{x\pm c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right) = \theta(x \pm c_o t) .$$

Die expliziten Lösungen für den Druck p und die Geschwindigkeit u ergeben sich dann in den ursprünglichen Einheiten zu:

$$(9.1) \qquad u(x,t) = \frac{c_o}{2\varkappa}\frac{\Delta p}{p_o}\left\{\Phi\left(\frac{x+c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\right\}$$

$$(9.2) \qquad p(x,t)/p_o = 1 - \frac{\Delta p}{2p_o}\left\{\Phi\left(\frac{x+c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right) + \Phi\left(\frac{x-c_o t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\right\}.$$

Lösung (7) bzw. (9) stellt dabei eine nach rechts und eine nach links fortschreitende Diffusionswellenmode dar, wobei deren Ausbreitungsgeschwindigkeit gerade durch die Schallgeschwindigkeit c_o des ruhenden Gases gegeben ist.

Im allgemeinen Fall sind, entsprechend den drei Charakteristikenscharen (4.3) bzw. in linearisierter Form ($|u| \ll c$):

$$C^{1;2} : \ \frac{dx}{dt} = \pm c_o \qquad C^3 : \ \frac{dx}{dt} = 0 ,$$

auch drei Wellenmoden zu erwarten.

Betrachten wir dazu neben der Kontinuitätsgleichung (3.1) und der Bewegungsgleichung (3.2) diejenige für die Schallgeschwindigkeit (3.3)', so liefert eine analoge Ableitung wie oben die Greensche Funktion für das linearisierte System (4):

$$(10.1) \quad \underline{\underline{G}}(x,t) = \frac{\exp\left\{-\frac{(x-c_o t)^2}{4\nu t}\right\}}{\sqrt{4\pi\nu t}} \frac{\underline{\tilde{b}}^1\underline{\tilde{b}}^1}{|\underline{\tilde{b}}^1|^2} + \frac{\exp\left\{-\frac{(x+c_o t)^2}{4\nu t}\right\}}{\sqrt{4\pi\nu t}} \frac{\underline{\tilde{b}}^2\underline{\tilde{b}}^2}{|\underline{\tilde{b}}^2|^2}$$

$$+ \frac{\exp\left\{-\frac{x^2}{4\alpha t}\right\}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \frac{\underline{\tilde{b}}^3\underline{\tilde{b}}^3}{|\underline{\tilde{b}}^3|^2} ,$$

worin neben $\nu = \frac{1}{2\varrho_o}\left\{\frac{4}{3}\eta + \eta' + \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\lambda\right\}$ als zweiter Diffusionskoeffizient:

$$(10.2) \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\varrho_o c_p}$$

die Temperaturleitfähigkeit auftritt.

Analog zu dem Anfangswertproblem (8.1) lassen sich zusätzlich die Lösungen für die Massendichte ϱ und die Tempe-

ratur $T \sim c^2$ angeben:

$$(11.1)\quad \varrho(x,t)/\varrho_0 = 1 + \frac{\Delta s}{c_p}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right) - \frac{\Delta p}{2}\left\{\Phi\left(\frac{x+c_0 t}{\sqrt{2\nu t}}\right)+\Phi\left(\frac{x-c_0 t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\right\}$$

$$(11.2)\quad T(x,t)/T_0 = 1 - \frac{\Delta s}{c_p}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right) - \frac{\varkappa-1}{2}\frac{\Delta p}{p_0}\left\{\Phi\left(\frac{x+c_0 t}{\sqrt{2\nu t}}\right)+\Phi\left(\frac{x-c_0 t}{\sqrt{2\nu t}}\right)\right\}$$

mit $$\frac{\Delta s}{c_v} := \frac{\Delta p}{p_0} - \varkappa\frac{\Delta\varrho}{\varrho_0} \quad .$$

Hierin tritt neben den beiden sich mit c_0 ausbreitenden Wellenmoden eine reine Diffusionsmode im Ursprung auf, die in Verbindung steht mit der Entropieänderung $\sim \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha t}}\right)$.

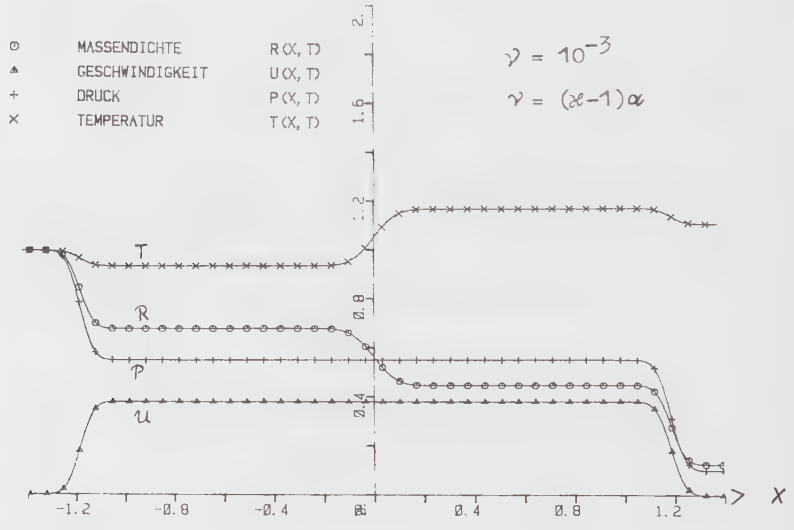


Abb. 3.1 Lösung der linearisierten Gleichungen

Im Grenzfall $\alpha,\nu \longrightarrow 0+$ liegen scharfe Übergänge bei $x = 0$ (Mediengrenze) und bei $x = \pm c_0 t$. Für u und p erhält man die bekannten Schallwellen-Lösungen (akustische Näherung), die hier als gedämpfte Wellen auftreten. Während u und p an der Mediengrenze stetig verlaufen, weisen ϱ und T eine Diskontinuität auf bzw. genügen hier einer Diffusions- oder Wärmeleitungsgleichung mit dem isobaren Diffusionskoeffizienten $\alpha = \frac{\lambda}{\varrho c_p}$ (Temperaturleitfähigkeit).

3.3 Entwicklung um die Riemannsche Lösung der einfachen Wellen

Hatten wir im letzten Abschnitt die nichtlinearen Konvektionsterme gegenüber den entropieerzeugenden Dissipationstermen vernachlässigt, so gehen wir hier von den Riemannschen nichtlinearen einfachen Wellen der isentropen Gasdynamik aus und betrachten die Dissipation als Störung dieser Wellen. Dazu benutzen wir das Gleichungssystem 2(19) und berücksichtigen die Entropieänderung in quadratisch-nichtlinearer Ordnung, dann erhalten wir in dieser Näherung das System:

$$(12.1) \qquad c_t + uc_x + \frac{\varkappa-1}{2} cu_x = \lambda^* c_{xx}$$

$$(12.2) \qquad u_t + uu_x + \frac{2}{\varkappa-1} cc_x = \mu^* u_{xx} + c^2 f_x$$

$$(12.3) \qquad f_t + uf_x = \frac{2}{\varkappa-1} \frac{\lambda^*}{\varkappa c_0} c_{xx}$$

mit

$$s =: \varkappa Rf \qquad \lambda^* := \frac{\lambda}{\varrho_0 c_v} \qquad \mu^* := \frac{\mu}{\varrho_0} \ .$$

Wählen wir hierin den Ansatz:

$$(13) \qquad c(x,t) = c(u) + \varphi(x,t) \ ,$$

worin die Funktion $c(u)$ gerade durch die Beziehung der einfachen Welle beschrieben sei: $\frac{dc}{du} = \pm \frac{\varkappa-1}{2}$.

Setzen wir ferner voraus, daß der Störungsterm φ von 2. Ordnung ist, so folgt:

$$(14.1) \qquad u_t + (u \pm c)u_x \pm \frac{2c_0}{\varkappa-1} \varphi_t = \lambda^* u_{xx}$$

$$(14.2) \qquad u_t + (u \pm c)u_x + \frac{2c_0}{\varkappa-1} \varphi_x = \mu^* u_{xx} + c^2 f_x$$

$$(14.3) \qquad f_t + uf_x = \pm \frac{\lambda^*}{\varkappa c_0} u_{xx} \ .$$

Ausgehend vom Fall der Isentropie werde die Entropiedichte s wie φ als von 2. Ordnung angenommen, und beide Funktionen erfüllen nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts

mit einer Genauigkeit bis zu Gliedern einschließlich 2. Ordnung die linearen Gleichungen für Schallwellen:

$$(15) \qquad \varphi_t \pm c_0 \varphi_x = 0 \qquad f_t \pm c_0 f_x = 0 \ .$$

Setzt man dies in (14) ein, so erhält man:

$$(16.1) \qquad u_t + (u \pm c) u_x = \lambda^* u_{xx} + \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \varphi_x$$

$$(16.2) \qquad u_t + (u \pm c) u_x = \mu^* u_{xx} - \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \varphi_x - \frac{\lambda^*}{\varkappa} u_{xx} \ .$$

Man findet durch Vergleich:

$$(16.3) \qquad \frac{2c_0}{\varkappa - 1} \varphi_x = \frac{1}{2\varrho_0} \left\{ \mu - \left(\frac{1}{c_v} + \frac{1}{c_p} \right) \lambda \right\} u_{xx}$$

und als Entwicklungsgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $u(x,t)$:

$$(17.1) \qquad u_t + \left(\frac{\varkappa + 1}{2} u \pm c_0 \right) u_x = \nu u_{xx}$$

mit dem schon aus der linearisierten Form bekannten Diffusionskoeffizienten:

$$(17.2) \qquad \nu = \frac{1}{2\varrho_0} \left\{ \frac{4}{3} \eta + \eta' + \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \lambda \right\} \ .$$

Vermöge der Substitution (vgl. Abschnitt 2.4):

$$(17.3) \qquad \vartheta = \frac{\varkappa + 1}{2} u \qquad x' = x \pm c_0 t$$

geht Gleichung (17.1) genau in die Burgers-Gleichung (vgl. 2.5) über:

$$(18) \qquad \vartheta_t + \vartheta \vartheta_x = \nu \vartheta_{xx} \qquad (x' \longrightarrow x) \ .$$

Man sieht sofort, daß die Lösung (9.1) für u gerade die linearisierte Gleichung (17.1): $u_t \pm c_0 u_x = \nu u_{xx}$ löst.

Die physikalische Bedeutung dieser Burgers-Gleichung in der Wellenausbreitung bei gasdynamischen Problemen ist schon von einer Reihe Autoren (vgl. Whitham /70/, Moran & Shen /46/, Halabisky & Sirovich /23/, Karpman /32/) erkannt worden.

Im Hinblick auf die Entwicklung eines allgemeinen Näherungsverfahrens lassen sich die Lösung $\underline{U}$ und die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ in eine Störungsreihe mit dem Ordnungs-

Parameter Re^{-1} entwickeln:

(19.1) $$\underline{U}(x,t) = \underline{U}^{(o)} + Re^{-1}\underline{U}^{(1)} + \dots ,$$

worin $\underline{U}^{(1)}$ gerade das linearisierte System (vgl. Anhang 8.2) löst:

(19.2) $$\underline{U}^{(1)}(x,t) = \sum_{j=1}^{3} \varphi^j(x-d^j t, Re^{-1}t)\, \underline{b}^j .$$

Die Lösung in quadratisch-nichtlinearer Näherung zeigt (vgl. /23/), daß die Koeffizientenfunktionen φ^j der beiden ersten Moden den Entwicklungsgleichungen:

(20.1) $$\varphi^{1;2}_t + c_o\left(\frac{\varkappa+1}{2}\,\varphi^{1;2} \pm 1\right)\varphi^{1;2}_x = \nu\,\varphi^{1;2}_{xx}$$

genügen, während die dritte Mode der Kontaktzone eine gewöhnliche Diffusionsgleichung - mit dem isobaren Diffusionskoeffizienten $\alpha = \frac{\lambda}{\varrho_o c_p}$ - erfüllt:

(20.2) $$\varphi^3_t = \alpha\,\varphi^3_{xx}$$

Betrachten wir z.B. nur die nach rechts fortschreitende Diffusionsmode, so ist die Lösung der Burgers-Gleichung (18) zur Anfangsverteilung:

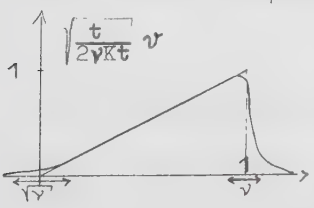
(20.3) $$\vartheta_o(x) = 2\nu K^*\,\delta(x)$$

gegeben durch (vgl. Abschnitt 2.5 und 4.5): $z := \frac{x}{2\sqrt{\nu t}}$

(21.2) $$\vartheta(x,t) = \sqrt{\frac{4\nu}{\pi t}}\;\frac{\exp(-\frac{x^2}{4\nu t})}{\operatorname{erfc}(\frac{x}{2\sqrt{\nu t}}) + 2e^{-K}} \quad \text{mit} \quad e^K := e^{K^*}-1 .$$

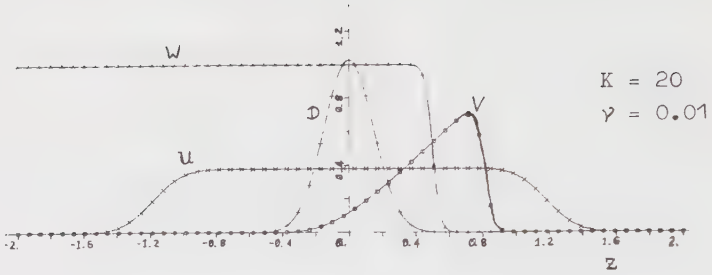
Bei asymptotischer Entwicklung (vgl. Anhang 8.3):
$\operatorname{erfc}(z) \longrightarrow \frac{\exp(-z^2)}{z\sqrt{\pi}}$ hat diese Lösung die Darstellung:

(21.3) $$\vartheta(x,t) \longrightarrow \sqrt{\frac{4\nu}{\pi t}}\; z\sqrt{\pi}\left\{1 + 2z\sqrt{\pi}\,\exp\left[-K\left(1-\frac{z^2}{K}\right)\right]\right\}^{-1}$$

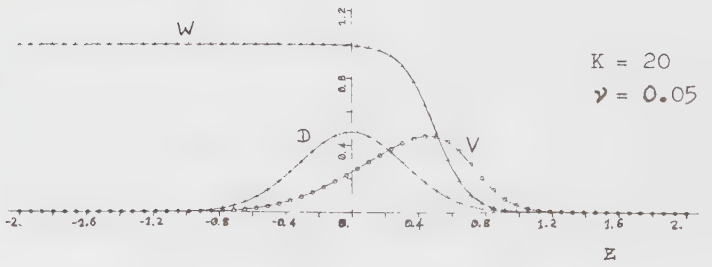


$$\vartheta(x,t) \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{für } o < x < 2\sqrt{\nu Kt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und stellt eine Stoßwelle des Sprunges $\Delta\vartheta = 2\sqrt{\frac{\nu K}{t}}$ dar.



⊙	DREIECKSLOESUNG	V(X, T)
▲	STATIONAERE LOESUNG	W(X, T)
+	DIFFUSIONSLOESUNG	D(X, T)
×	LINEARE LOESUNG	U(X, T)



⊙	DREIECKSLOESUNG	V(X, T)
▲	STATIONAERE LOESUNG	W(X, T)
+	DIFFUSIONSLOESUNG	D(X, T)

Abb. 3.2: einfache Lösungen der Burgers-Gleichung

4. Freie Expansionsströmung eines Knudsen-Gases

Neben den vorwiegend makroskopisch-gasdynamischen Betrachtungen der übrigen Arbeit gehen wir in diesem Kapitel auf die gaskinetische Beschreibung der instationären Expansionsströmungen ein. In der kinetischen Gastheorie werden die makroskopisch beobachtbaren Eigenschaften des Gases auf die Bewegung der Einzelpartikel zurückgeführt. Diese Theorie bietet sich vor allem zur Beschreibung solcher Phänomene an, bei denen stärkere Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht auftreten.

4.1 Kompressible Gasdynamik auf der Grundlage der stoßfreien Boltzmann-Gleichung

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist die kräftefreie Boltzmann-Gleichung (vgl. Abschnitt 1.3 und 1.4):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right\} f(\underline{x},\underline{v},t) = C(ff) \quad .$$

Diese beschreibt die Raum-, Geschwindigkeits- und Zeitentwicklung der Massendichteverteilung $f(\underline{x},\underline{v},t)$. Das Stoßintegral $C(ff)$, welches die Gewinn-Verlust-Bilanz aufgrund der Partikelstöße darstellt, wird im Hinblick auf die Beschreibung eines sehr dünnen sogenannten Knudsen-Gases (vgl. Abschnitt 1.4) im folgenden vernachlässigt, so daß wir die stoßfreie Boltzmann-Vlasov-Gleichung erhalten:

(1) $\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \right\} f(\underline{x},\underline{v},t) = 0 \quad$ mit $\quad f(\underline{x},\underline{v},o) = f_o(\underline{x},\underline{v})$.

Mit Hilfe der Charakteristikenmethode (vgl. Abschnitt 2.3) oder mit Hilfe der Fourier-Transformation (vgl. Anhang 8.2) läßt sich deren Lösung zu beliebiger Anfangsverteilung f_o herleiten:

(2) $$f(\underline{x},\underline{v},t) = f_o(\underline{x}-\underline{v}t,\underline{v}) \quad .$$

Mit Hilfe der Substitution

(3) $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{v}t \qquad$ und damit $\quad d^n x' = -t^n d^n v$

lassen sich dann die Geschwindigkeitsmittelwerte schreiben

als:

(4) $\phi(\underline{x},t) = \langle f \mid \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{t^n} \varphi(\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t}) f_o(\underline{x}', \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t})$.

So gilt z.B. für die beiden ersten Geschwindigkeitsmomente

(5.1) $\varrho(\underline{x},t) = \langle f \mid 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{t^n} f_o(\underline{x}', \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t})$

(5.2) $\underline{u}(\underline{x},t) = \varrho^{-1} \langle f \mid \underline{v} \rangle = \underline{x} t^{-1} - \frac{1}{\varrho t^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x' \; \underline{x}' f_o(\underline{x}', \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t})$,

worin man sieht, daß die Geschwindigkeit $\underline{u}$ sich formal etwa in einen "kinematischen Anteil" $\underline{x}t^{-1}$ und einen "dynamischen Anteil" $\sim \int d^n x' \; \underline{x}' f_o(\underline{x}', \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t})$ aufspalten läßt (vgl. Riemannsche Lösung 2(21) mit $x = ut + \xi(u)$).

Folgend einer Idee von Narasimha /50/ in Verallgemeinerung einer speziellen Lösung der kinetischen Gleichung (1) von Keller /33/ (vgl. auch Molmud /45/) wählen wir für die folgenden Untersuchungen als Anfangsverteilung in (1):

(6) $f_o(\underline{x},\underline{v}) = g(\underline{x}) \cdot h(\underline{v})$ mit

$h(\underline{v}) = (a\sqrt{2\pi})^{-n} \exp(-\frac{v^2}{2a^2})$ und $a^2 := \frac{k T_o}{m}$.

Wir setzen also für einen Anfangszeitpunkt $t_o := o$ eine Gleichgewichts-Maxwell-Verteilung $h(\underline{v})$ bzgl. der Temperatur mit einer räumlich inhomogenen Massendichte-Verteilung $g(\underline{x})$ voraus, d.h. speziell Orts- und Geschwindigkeitsverteilung seien zu Beginn statistisch unabhängig.

Für die Massendichte $\varrho(\underline{x},t)$ nach (5.1) findet man somit wegen (3):

(7) $\varrho(\underline{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n v}{(a\sqrt{2\pi})^n} g(\underline{x}-\underline{v}t) \exp(-\frac{v^2}{2a^2})$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(at\sqrt{2\pi})^n} g(\underline{x}') \exp(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{2a^2t^2})$.

Betrachten wir hierin die Zeit-Transformation:

(8.1) $2\omega\tau := a^2t^2$ mit $\omega\dot{\tau} = a^2 t$,

so erkennen wir in der Darstellung (7):

(8.2) $\varrho(\underline{x},\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(4\pi\omega\tau)^{n/2}} g(\underline{x}') \exp(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{4\omega\tau})$

die allgemeine Lösung der Diffusionsgleichung:

(8.3) $\varrho_t = \omega \Delta \varrho$ mit $\varrho(\underline{x},0) = g(\underline{x})$.

Die (8.1) entsprechende Rücktransformation ergibt eine Differentialgleichung für $\varrho(\underline{x},t)$:

(9) $\varrho_t = a^2 t \Delta \varrho$ mit $\varrho(\underline{x},0) = g(\underline{x})$,

die sich also ebenfalls als Diffusionsgleichung, allerdings mit zeitabhängigem "Diffusionskoeffizienten" $D = a^2 t$ ergibt. Man erkennt, daß $\varrho(\underline{x},t)$ invariant unter Zeitumkehr ist, was bei einer gewöhnlichen Diffusionsgleichung nicht der Fall ist.

Die höheren Geschwindigkeitsmomente lassen sich nun auf dieses Ergebnis zurückführen. So gilt für die Impulsdichte $\underline{j}$:

(10.1) $$\underline{j}(\underline{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(at\sqrt{2\pi})^n} \frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t} g(\underline{x}') \exp\left(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{2a^2t^2}\right) .$$

Dies läßt sich einmal partiell integrieren und stellt sich als proportional zum Gradienten der Massendichte dar:

(10.2) $$\underline{j}(\underline{x},t) = -a^2 t \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(at\sqrt{2\pi})^n} g(\underline{x}') \exp\left(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{2a^2t^2}\right)$$
$$= -a^2 t \cdot \operatorname{grad} \varrho(\underline{x},t) .$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Kontinuitätsgleichung 1(5.1):

(11) $\varrho_t + \operatorname{div}(\varrho \underline{u}) = 0$ mit $\underline{j} = \varrho \underline{u}$

ein, so ergibt sich natürlich wiederum die Diffusionsgleichung (9).

Für die Gesamt-Energiedichte $e = \frac{1}{2}\langle f|\underline{v}^2\rangle$ finden wir analog:

(12.1) $$e(\underline{x},t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(at\sqrt{2\pi})^n} \left|\frac{\underline{x}-\underline{x}'}{t}\right|^2 g(\underline{x}') \exp\left(-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{2a^2t^2}\right) .$$

Partielle Integration wie in (10) ergibt:

(12.2) $$e(\underline{x},t) = \frac{a^2}{2}(n\varrho - t \operatorname{div} \underline{j}) = \frac{n}{2} a^2 \left(\varrho + \frac{a^2 t^2}{n} \Delta \varrho\right) .$$

Mit (12) ist folglich auch der Druck p wegen

$e = \frac{1}{2}(np + \varrho \underline{u}^2)$ bekannt (vgl. 1(4)):

$$(13) \qquad p(\underline{x},t) = \varrho(a^2 - \frac{a^2 t}{n} \operatorname{div} \underline{u}) \ ,$$

und ebenso die Temperatur T mittels der Definition über das "ideale Gasgesetz" $p = \varrho RT$ mit der spezifischen Gaskonstanten $R = \frac{k}{m}$ und $a^2 = RT_o$:

$$(14) \qquad T(\underline{x},t) = T_o \left\{ 1 - \frac{t}{n} \operatorname{div} \underline{u} \right\} .$$

Bestimmung der Tensorgrößen (vgl. Abschnitt 1.3):

Der Drucktensor $\underline{\underline{P}}$, definiert durch

$$P_{jk} := \left\langle f \middle| (v_j - u_j)(v_k - u_k) \right\rangle =: \varrho \overline{(v_j - u_j)(v_k - u_k)} \ ,$$

läßt sich analog zu (12) berechnen, und man findet:

$$(15.1) \qquad P_{jk} = a^2 \varrho \, \delta_{jk} - a^2 t \, \frac{\partial}{\partial x_j} (\varrho u_k) - \varrho u_j u_k \ .$$

Dies läßt sich (nach Symmetrisierung) unter Benutzung von (13) auf die Navier-Stokes-Form (vgl. Abschnitt 1.2):

$$(15.2) \quad P_{jk} = p \, \delta_{jk} - \eta \left\{ \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{u_k}{x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \operatorname{div} \underline{u} \right\} - \eta' \delta_{jk} \operatorname{div} \underline{u}$$

bringen, wobei sich durch Koeffizientenvergleich mit den aus (15.1) berechneten Gliedern für die Viskositätskoeffizienten η und η' ergibt:

$$(16) \quad \eta = \frac{a^2 t}{2} \varrho \qquad \eta' = \frac{n-3}{3n} a^2 t \, \varrho \qquad \mu := \frac{4}{3}\eta + \eta' = \frac{n-1}{n} a^2 t \, \varrho,$$

worin für die Volumenviskosität bei $n = 3$ gilt: $\eta' = 0$ und für die Reibungszahl $\mu = 0$ für $n = 1$ in Übereinstimmung mit allgemeinen statistischen Überlegungen.

Der Wärmestromvektor $\underline{q}$, definiert durch

$$q_i := \frac{1}{2} \left\langle f \middle| (v_i - u_i)(\underline{v} - \underline{u})^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \varrho \overline{(v_i - u_i)(\underline{v} - \underline{u})^2} \ ,$$

läßt sich auf die Form des Fourier'schen Gesetzes (vgl. Abschnitt 1.2) bringen:

$$(17) \qquad \underline{q} = -\lambda \frac{\partial}{\partial \underline{x}} T(\underline{x},t) \ .$$

Der Wärmeleitungskoeffizient λ berechnet sich zu:

$$(18) \quad \lambda = \frac{n}{2} R \, a^2 t \, \varrho = c_v \, a^2 t \, \varrho \qquad \text{mit} \quad c_v = \frac{n}{2} R \ .$$

Betrachten wir die dimensionslosen Kennziffern, die den Zusammenhang der Transportgrößen η, λ, D beschreiben, so finden wir im Vergleich zu Abschnitt 1.4:

Kennziffer	Definition	elementar	starre Kugeln	Knudsen-Gas
Prandtl-Zahl	$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$	$1 + \frac{2}{n}$	$\frac{4+2n}{9+2n}$	$\frac{n+2}{2n}$
Schmidt-Zahl	$Sc = \frac{\eta}{\varrho D}$	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$
Lewis-Zahl	$Le = \frac{\varrho D c_p}{\lambda}$	$1 + \frac{2}{n}$	$\frac{6}{5}\frac{4+2n}{9+2n}$	$1 + \frac{2}{n}$

Z.B. ergibt sich für die Prandtl-Zahl Pr in Luft (n = 5) empirisch $Pr_{emp} = 0.715$, während

$Pr_{elem} = 1.400$, $Pr_{Kugel} = 0.737$, $Pr_{Kn} = 0.700$ ist.

Die Kennziffern aufgrund dieses Modells liegen damit in der richtigen Größenordnung, obwohl die Dichte-Abhängigkeit der Transportkoeffizienten η und λ bei den stoßfreien Knudsen-Gasen im Gegensatz zur reinen Temperatur-Abhängigkeit im gasdynamischen Bereich hier zu beachten ist. Dieser Unterschied erklärt sich mit Hilfe der Darstellung 1(32), wenn wir dort $v_o \lambda \sim a^2 t$ setzen, wie es bei der freien Expansion mit $v_o \sim a = \sqrt{RT_o}$ und $\lambda \sim at$ zu erwarten ist.

Eine Folge der Voraussetzung der Stoßfreiheit ist ebenfalls, daß für den Diffusionskoeffizienten $D \sim t$ gilt, weil

$\Delta \underline{x}_{Molekül} = \underline{v}t$ ist gegenüber $\overline{(\Delta \underline{x})^2}^{1/2} \sim \sqrt{t}$ mit

$\overline{(\Delta \underline{x})^2} := \overline{(\sum_{j=1}^{N} \Delta \underline{x}_j)^2}$ im Falle vieler Stöße in der Zeit t .

Es zeigt sich insgesamt, daß die ersten drei Momentengleichungen ein in sich geschlossenes Navier-Stokes-System mit nichtverschwindenden Dissipationskoeffizienten η und λ bilden. Dieses gasdynamische System läßt sich explizit für ein Anfangswertproblem der Form 3(8) lösen (vgl. Abschnitt 4.3).

4.2 Beispiele spezieller Anfangsverteilungen

Wir wollen im folgenden einige einfache Beispiele zur Expansion von Gaswolken ins Vakuum betrachten. Dazu stellen wir uns vor, daß ein bis zur Zeit $t = o$ von einer äußeren Wand in einem bestimmten Gebiet gehaltenes Gas bei plötzlichem Entfernen der Wand zur Zeit $t = o$ dann frei expandieren kann.

1.) Die Punkt-Wolke

Analog etwa der Vorstellung einer "Multi-Pol-Entwicklung" sollte für einen Betrachter in großer Entfernung zu einer endlichen Gaswolke diese als praktisch punktförmig erscheinen.

Man hat für eine Punkt-Wolke im Ursprung nach (6) die Anfangsverteilung:

$$(19) \qquad f_o(\underline{x},\underline{v}) = \frac{\mathcal{M}}{(a\sqrt{2\pi})^n}\,\delta(\underline{x})\,\exp\Big(-\frac{v^2}{2a^2}\Big)$$

mit der Gewichtsfunktion $g(\underline{x}) = \mathcal{M}\,\delta(\underline{x})$, worin $\delta(\underline{x})$ die "Dirac-Funktion" mit der Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}^n} d^n x\ \delta(\underline{x}) = 1$ bedeutet.

Massendichte $\varrho(\underline{x},t)$ und Geschwindigkeit $\underline{u}(\underline{x},t)$ dieser sich ausbreitenden Punkt-Wolke berechnen sich dann nach (7) und (10) durch Integration zu:

$$(20) \qquad \varrho(\underline{x},t) = \frac{\mathcal{M}}{(at\sqrt{2\pi})^n}\,\exp\Big(-\frac{x^2}{2a^2t^2}\Big) \quad \text{und} \quad \underline{u}(\underline{x},t) = \underline{x}\,t^{-1}\,,$$

worin für die Geschwindigkeit $\underline{u}$ also nur der kinematische Anteil auftritt.

2.) Eine Wolke endlicher Breite

In diesem Fall sei ein Gas zwischen zwei Wände bei $x = \pm 1$ eingesperrt. Die zugehörige Anfangsverteilung lautet dann:

$$(21) \qquad f_o(\underline{x},v) = \frac{\varrho_o}{a\sqrt{2\pi}}\Big\{\theta(x+1) - \theta(x-1)\Big\}\exp\Big(-\frac{v^2}{2a^2}\Big)\,,$$

worin $\theta(x)$ die Heaviside'sche Sprungfunktion (vgl. Anhang 8.3) bedeutet.

Massendichte $\varrho(x,t)$ und Impulsdichte $j(x,t)$ ergeben sich zu

(22.1) $$\varrho(x,t) = \frac{\varrho_0}{2}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x+l}{at\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-l}{at\sqrt{2}}\right)\right\}$$

(22.2) $$j(x,t) = \frac{\varrho_0 a}{\sqrt{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-l)^2}{2a^2t^2}\right] - \exp\left[\frac{(x+l)^2}{2a^2t^2}\right]\right\} ,$$

was im Grenzfall $l \longrightarrow 0$ mit $\mathcal{M} := 2l\varrho_0 < \infty$ in den Fall 1.) übergeht, wobei gilt: $\frac{d}{dx}\,\theta(x) = \delta(x)$.

3.) Die Lösung von Keller

Betrachtet man in (22) die Translation $x-l \longrightarrow x$:

(23.1) $$\varrho(x,t) = \frac{\varrho_0}{2}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x+2l}{at\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{at\sqrt{2}}\right)\right\} \quad \text{und}$$

(23.2) $$j(x,t) = \frac{\varrho_0 a}{2}\left\{\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2t^2}\right) - \exp\left(-\frac{(x+2l)^2}{2a^2t^2}\right)\right\}$$

und geht dann zu dem Grenzfall $l \longrightarrow \infty$ über, so erhält man den Fall der Ausbreitung eines den Halbraum ausfüllenden Gases ins Vakuum. Die auf Keller /33/1948 zurückgehende Anfangsverteilung dazu ist:

(22) $$f_0(x,v) = \frac{\varrho_0}{a\sqrt{2\pi}}\,\theta(-x)\cdot\exp\left(-\frac{v^2}{2a^2}\right) .$$

Die nur von der (normierten) Ähnlichkeitsvariablen

$$z := \frac{x}{at\sqrt{2}} \qquad \text{mit} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{at\sqrt{2}}\,\frac{d}{dz}$$

abhängenden gasdynamischen Größen ergeben sich dann nach (7) - (15) (vgl. Anhang 8.3) zu:

(23.1) $$\varrho(z) = \frac{\varrho_0}{2}\left\{1 - \operatorname{erf}(z)\right\} = \frac{\varrho_0}{2}\operatorname{erfc}(z) = \varrho_0\left\{1 - \Phi(z\sqrt{2})\right\}$$

(23.2) $$j(z) = \frac{\varrho_0 a}{2}\exp(-z^2) = \varrho(z)\cdot u(z)$$

(23.3) $$u(z) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}$$

(23.4) $$p(z) = p_0\left\{1 - \Phi(z\sqrt{2}) + \frac{z}{n\sqrt{\pi}}\exp(-z^2) - \frac{1}{\pi n}\,\frac{\exp(-2z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}\right\}$$

(23.5) $$T(z) = T_0\left\{1 + \frac{2z}{n\sqrt{\pi}}\,\frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)} - \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z)}\right]^2\right\}$$

(23.6) $$e(z) = \frac{n}{2}\,p_0\left\{1 - \Phi(z\sqrt{2}) + \frac{z}{n}\exp(-z^2)\right\} .$$

Die graphische Darstellung dieser Keller'schen Lösung (23) für die Massendichte $\varrho(z)$ und die Strömungsgeschwindigkeit $u(z)$ ergibt:

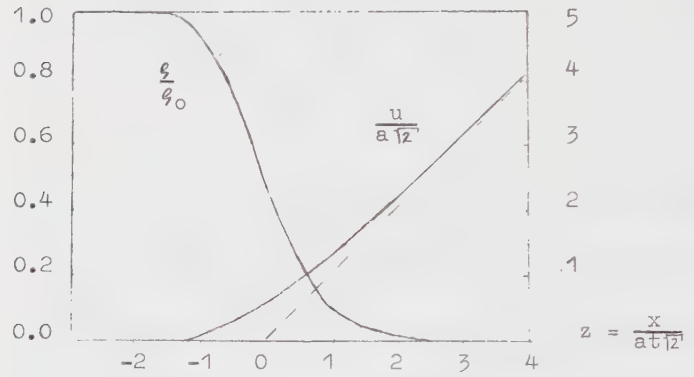


Abb. 4.1 Keller'sche Lösung

Im Hinblick auf die globalen Größen der Masse $\mathcal{M}$, des Impulses $\mathcal{J}$ und der Energie $\mathcal{E}$ läßt sich allgemein berechnen:

$$(24.1)\quad \mathcal{M}(t) := \int_{\mathbb{R}^n} d^n x\ \varrho(\underline{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x'\ \varrho_0(\underline{x}') = \mathcal{M}(0)$$

$$(24.2)\quad \mathcal{J}(t) := \int_{G(t)} d^n x\ \underline{j}(\underline{x},t) = -a^2 t \oint_{\partial G} \varrho(\underline{x},t)\ d\underline{o}$$

$$(24.3)\quad \mathcal{E}(t) := \int_{G(t)} d^n x\ e(\underline{x},t) = \frac{n}{2} a^2 \mathcal{M} - \frac{a^2 t}{2} \oint_{\partial G} \varrho\, \underline{u} \cdot d\underline{o}\ ,$$

und man sieht, daß die globalen Größen wesentlich durch die Oberflächenterme am Rande der Strömung bestimmt sind.

Im vorliegenden Fall der Kellerschen Lösung für die Expansion eines Gases ins Vakuum kann es sich daher nicht um eine globale Lösung handeln:

$$\mathcal{M}(t) \longrightarrow -\varrho_0 x_1$$

$$\mathcal{J}(t) \longrightarrow a^2 t\, \varrho_0 = p_0 t = \mathcal{J}^+$$

$$\mathcal{E}(t) \longrightarrow \frac{n}{2} a^2 \mathcal{M}(t) \longrightarrow \frac{n}{2} p_0 x_1 \quad .$$

Im asymptotischen Grenzfall $z \longrightarrow \infty$ stimmt diese Lösung mit der Burgers'schen überein (vgl. 2.4).

Wir interessieren uns für die Schwerpunktlage der jeweils bewegten Masse bei diesem Expansionsproblem (vgl. Abschnitt 5.6); dazu definieren wir:

$$(24.1)\quad x_s(t) = \overline{x(t)} =: \frac{\int_{x_l}^{x_r} x\, \varrho(x,t)\,dx}{\int_{x_l}^{x_r} \varrho(x,t)\,dx} = \frac{1}{M}\int_{x_l}^{x_r} x\, \varrho(x,t)\,dx \ .$$

Sei $\vartheta := at$, so gilt für die Kellersche Lösung (23.1):

$$\int_{x_l}^{x_r} x\varrho\,dx = \frac{\varrho_0}{2}\int_{x_l}^{x_r} x\,dx - \frac{\varrho_0}{2}\int_{x_l}^{x_r} x\ \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\vartheta\sqrt{2}}\right)dx \ .$$

Unter Benutzung der asymptotischen Entwicklung für erf (vgl. Anhang 8.3):

$$\mathrm{erf}\left(\frac{|x|}{\vartheta\sqrt{2}}\right) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\vartheta}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2\vartheta^2}\right)\left(1-\frac{\vartheta^2}{x^2} \pm \ldots\right) \quad \text{für } |x| \gg \vartheta$$

erhält man:

$$(24.2)\quad \int_{x_l}^{x_r} x\varrho\,dx = -\frac{\varrho_0}{2}(x_1^2-\vartheta^2) - \frac{\varrho_0\vartheta^2}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x_r^2}{2\vartheta^2}\right)(1\pm\ldots)$$
$$+ \frac{\varrho_0\vartheta}{2\sqrt{2\pi}}\frac{x_1^2-\vartheta^2}{|x_1|}\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\vartheta^2}\right)\left(1-\frac{\vartheta^2}{x_1^2} \pm \ldots\right) \ .$$

Im Grenzfall $x_r \longrightarrow +\infty$ $\qquad x_1 \longrightarrow -\infty$ erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \int_{x_l}^{x_r} x\varrho\,dx &\longrightarrow \frac{\varrho_0}{2}(x_1^2-\vartheta^2) \\ \int_{x_l}^{x_r} \varrho\,dx &= -\varrho_0 x_1 \end{aligned}\right\} \qquad x_s(t) \longrightarrow \frac{x_1^2-\vartheta^2}{2x_1} \ .$$

Die Verschiebung der Schwerpunktlage ergibt sich damit zu:

$$(24.3)\quad \Delta x_s := x_s(t) - x_s(o) = \frac{\vartheta^2}{2|x_1|} = \frac{a^2t^2}{2|x_1|} \ .$$

Dies bedeutet insbesondere im Hinblick auf den Impuls der Strömung, daß sich hier bei fehlender charakteristischer Phasengeschwindigkeit $(=\infty)$ durch Vertauschung der Grenzübergänge (nichtgleichmäßige Konvergenz) einerseits sowohl ein positiver Strömungsimpuls im endlichen Bereich berechnen läßt, als andererseits auch dem Impulssatz für das gesamte System genügt werden kann.

Im Gegensatz zur gasdynamischen Lösung (vgl. die Kapitel 3 und 5) liegt hier keine Abhängigkeit $x_1 = x_1(t)$ wie bei 5(58): $x_1 = -c_0 Mt$ vor, obwohl der Ausdruck (24.3) formal mit dem der Burgers'schen Lösung 5(58.5) übereinstimmt.

4.3 Herleitung der Differentialgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit

Nach den Gleichungen (7) - (9) läßt sich die Dichteverteilung $\varrho(x,t)$ als Lösung einer Diffusionsgleichung mit zeitabhängigem Diffusionskoeffizienten $D = D(t)$ darstellen:

(25) $\quad \varrho_t = D(t)\Delta\varrho \qquad$ mit $\qquad \varrho(\underline{x},o) = g(\underline{x})$.

Mit Hilfe der folgenden Beziehung (vgl. (10.2)):

(26) $\quad \varrho\,\underline{u} = -D(t)\ \mathrm{grad}\,\varrho$

wird die Geschwindigkeit $\underline{u}$ eingeführt. Um aus (25) und (26) eine Differentialgleichung für $\underline{u}$ herzuleiten, betrachten wir die Bäcklund-Transformation (vgl. Whitham /70/) mit einer noch zu bestimmenden Vektor-Funktion $\underline{\mathcal{F}}(\underline{x},t,\underline{u})$ und einem Operator $\mathcal{G}(\underline{x},t,\underline{u})$:

(27.1) $\quad \mathrm{grad}\,\varrho = \underline{\mathcal{F}}(\underline{x},t,\underline{u})\varrho \qquad \varrho_t = \mathcal{G}(\underline{x},t,\underline{u})\varrho$

Für den Laplace-Operator Δ , angewendet auf ϱ , ergibt sich eine Miura-Transformation:

(27.2) $\quad \Delta\varrho := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varrho = (\underline{\mathcal{F}}^2 + \mathrm{div}\,\underline{\mathcal{F}})\varrho$.

Die Bestimmung des Operators $\mathcal{G}$ erfolgt dann über Gleichung (25):

(28) $\quad \mathcal{G}(\underline{x},t,\underline{u})\varrho = D(t)\{\underline{\mathcal{F}}^2 + \mathrm{div}\,\underline{\mathcal{F}}\}\varrho$.

Mittels der Verträglichkeitsbedingung $\mathrm{grad}(\varrho_t) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\,\varrho)$ angewendet auf (27.1), erhalten wir:

(29) $\quad \{\underline{\mathcal{F}}_t + \underline{\mathcal{F}}\mathcal{G}\}\varrho = \{\mathrm{grad}\,\mathcal{G} + \mathcal{G}\,\underline{\mathcal{F}}\}\varrho$.

Bei verschwindendem Kommutator $[\underline{\mathcal{F}},\mathcal{G}] = 0$ resultiert eine Differentialgleichung für $\underline{\mathcal{F}}(\underline{x},t,\underline{u})$: $\underline{\mathcal{F}}_t = \mathrm{grad}\,\mathcal{G}$ und mit (28) erhält man:

(30) $\quad \underline{\mathcal{F}}_t = D(t)\cdot\{\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{\mathcal{F}} + \mathrm{grad}\,\underline{\mathcal{F}}^2\}$.

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit $\underline{u}(\underline{x},t)$ erhalten wir schließlich über die Ausgangsbeziehung (26) mit $\underline{u} = -D(t)\underline{\mathcal{F}}$:

(31.1) $\quad D\,\frac{\partial}{\partial t}(\underline{u}D^{-1}) + \mathrm{grad}\,\underline{u}^2 = D\ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\underline{u}$

mit $D = D(t) = a^2 t$. Wegen $\underline{u} = -D(t)\,\mathrm{grad}(\ln \varrho)$ und damit $\mathrm{rot}\,\underline{u} = 0$ gilt:

(31.2) $$D\,\frac{\partial}{\partial t}(\underline{u}\,D^{-1}) + 2(\underline{u}\cdot\mathrm{grad})\underline{u} = D\,\Delta\underline{u} \quad .$$

Führen wir nun wie in (8.1) eine neue Zeitskalierung ein:

(32) $$\tau = \tau(t) \qquad \text{mit} \qquad \omega\,\dot{\tau} = D(t)\ ,$$

so erhalten wir zu der Diffusionsgleichung (8.3) $\varrho_\tau = \omega\Delta\varrho$ mit Hilfe der Cole-Hopf'schen Transformation (vgl. Abschnitt 2.5):

(33) $$\varrho\,\underline{v} = -2\omega\,\mathrm{grad}\,\varrho$$

eine Definitionsgleichung für die Vektor-Funktion $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x},\tau)$, für die sich gemäß (27)-(31) eine vektorielle Burgers-Gleichung ableiten läßt:

(34.1) $$\underline{v}_\tau + (\underline{v}\cdot\mathrm{grad})\underline{v} = \omega\,\Delta\underline{v} \quad .$$

Der Zusammenhang der Strömungsgeschwindigkeit $\underline{u}$ mit der Lösung $\underline{v}$ der Burgers-Gleichung besteht in der Relation

(34.2) $$\underline{u}(\underline{x},t) = \frac{D(t)}{2\omega}\,\underline{v}(\underline{x},t) = \frac{a^2 t}{2\omega}\,\underline{v}(\underline{x},t) \quad .$$

Vermöge dieser Transformation (34.2) mit (32) und der speziellen Setzung $D(t) = a^2 t$ sind die in den Kapiteln 2 und 3 dargestellten Lösungen der Burgers-Gleichung auch Lösungen für die Strömungsgeschwindigkeit eines Knudsen-Gases.

Damit haben wir neben der Gleichung für die Massendichte ϱ eine entkoppelte Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{u}$ mit der allgemeinen Lösung:

(35) $$\underline{u}(\underline{x},t) = -a^2 t\,\frac{\partial}{\partial \underline{x}}\,\ln \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^n x'}{(at\sqrt{2\pi})^n}\, g(\underline{x}')\exp\left[-\frac{|\underline{x}-\underline{x}'|^2}{2a^2t^2}\right]$$

erhalten (vgl. die Lösungsdarstellungen zur Burgers-Gleichung in 2.5).

Mittels Gleichung (14): $\quad T = T_0\left(1 - \frac{t}{n}\,\mathrm{div}\,\underline{u}\right)$

läßt sich ebenfalls für die Temperatur eine separate Gleichung ableiten, die allerdings für die praktische Anwendung ziemlich unhandlich ist.

4.4 Untersuchung der Klasse der Ähnlichkeitslösungen

Bei der Betrachtung der Keller'schen Lösung (24) haben wir festgestellt, daß alle auftretenden gasdynamischen Größen nur von der Ähnlichkeitsvariablen

$$(36.1) \qquad z = \frac{x}{at\sqrt{2}}$$

abhängen. Wählen wir z als neue Variable, so lassen sich wegen

$$(36.2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{z}{t}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{at\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2a^2t^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

für $\varrho(x,t)$ und $u(x,t)$ gewöhnliche Differentialgleichungen erhalten ($' := \frac{\partial}{\partial z}$) :

Für die Gleichung (9) der Massendichte $\varrho(x,t)$ erhält man die Gleichung:

(37) $\varrho'' + 2z\varrho' = 0$ mit der Lösung: $\varrho(z) = A + B\,\mathrm{erf}(z)$.

Ebenso läßt die Gleichung der Impulsdichte $j(x,t)$, die sich mit einer entsprechenden Bäcklund-Transformation (27) zu $\frac{\partial}{\partial t}(jD^{-1}) = \Delta j$ ergibt, reduzieren:

(38) $\qquad j'' + 2(zj)' = 0 \qquad$ bzw. $\qquad j' + 2zj = \mathrm{const}$.

Es ergibt sich die Lösung $j(z) = C\exp(-z^2)$, worin nur eine Integrationskonstante auftritt, da zwischen $j(z)$ und $\varrho(z)$ der Zusammenhang (10.2) $j(z) = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z}\varrho(z)$ besteht.

Die Differentialgleichung (31) für die Strömungsgeschwindigkeit $u(x,t)$ ergibt sich mit der normierten Geschwindigkeit $w(z) = \frac{u(z)}{a\sqrt{2}}$ zu :

(39) $\quad w''/2 + (zw)' = 2w\cdot w' \quad$ bzw. $\quad w'/2 + zw = w^2 + \mathrm{const}$.

Die verbleibende nichtlineare Gleichung ist vom Bernoullischen Typ und hat die Lösung

$$w(z) = \frac{u(z)}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\exp(-z^2)}{E-\mathrm{erf}(z)} ,$$

worin wegen (10) gilt: $u(z) = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z}\ln\varrho(z)$, $E = \mathrm{const}$.

Die übrigen gasdynamischen Größen, wie Druck p und Tem-

peratur T , lassen sich nach (12) - (15) über (36) ableiten.

Aufgrund der Ähnlichkeitssubstitution $z = \frac{x}{at\sqrt{2}}$ sind die Lösungen der Gleichungen (37) - (39) nicht mehr für beliebige Anfangsverteilungen zu ermitteln; wir können sie allerdings für ein Randwertproblem angeben:

(40.1) $\varrho(\infty) = \varrho_r$ und $\varrho(-\infty) = \varrho_l$,

worin $\varrho_l > \varrho_r$ angenommen wird. Damit erhält man mit den Bezeichnungen:

(40.2) $\Delta\varrho := \varrho_l - \varrho_r$ und $e^{-K} := \frac{\varrho_r}{\varrho_l - \varrho_r}$:

(41.1) $\varrho(z) = \frac{\Delta\varrho}{2}\left\{\operatorname{erfc}(z) + 2e^{-K}\right\}$

(41.2) $j(z) = \frac{a\Delta\varrho}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2)$

(41.3) $u(z) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z) + 2\, e^{-K}}$.

Für die Temperatur T erhält man in Verallgemeinerung der Kellerschen Lösung 23.5 entsprechend: $n = \frac{2}{\varkappa - 1}$

(41.4) $T(z) = \left\{1 + \frac{2}{n\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{u}{a}\left(z\sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{u}{a}\right)\right\} T_o$.

4.5 Beispiele für Stoßwellen-ähnliche Lösungen

Bei den folgenden Betrachtungen sei $z = \frac{x}{at\sqrt{2}}$ die Ähnlichkeitsvariable. Als erstes Beispiel sei ein

1.) "Dichte-Pol" angenommen, d.h. es wird die symmetrische Expansion einer großen zentrierten Massendichte $M\delta(t)$ in ein - diese Stelle umgebendes - ruhendes Gas der Dichte ϱ_o betrachtet. Die Lösung der Diffusionsgleichung (9) zur Anfangsverteilung:

(42.1) $\varrho(x,o) = g(x) = \varrho_o + M\delta(x)$

ergibt die Lösungen für $\varrho(x,t)$ und $u(x,t)$:

$$(42.2) \qquad \varrho(x,t) = \varrho_0 + \frac{\mathcal{M}}{at\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2)$$

$$(42.3) \quad u(x,t) = \frac{x}{t} \frac{\frac{\mathcal{M}}{at\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2)}{\varrho_0 + \frac{\mathcal{M}}{at\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2)} = \frac{x}{t} \frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{Z} + \sqrt{\pi} \exp\{-Q(1 - \frac{z^2}{Q})\}} ,$$

wobei die Einheitslänge L , der Parameter der Größenordnung Q und $\mathcal{Z}$ eindeutig definiert sind durch $\mathcal{M} = \varrho_0 L e^Q$ und $\mathcal{Z} = \frac{L}{at\sqrt{2}}$.

Die Strömungsgeschwindigkeit $u(x,t)$ zeigt hierfür das Verhalten einer Stoßwelle. Die Lösung (42.3) erhält man aus der Burgers-Gleichung (36) (vgl. Whitham /70/) und bezeichnet sie dort als N-Welle (vgl. Abb. 4.2), die im Grenzfall $Q \longrightarrow \infty$ ergibt:

$$(43) \quad u(x,t) \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{für} \quad |x| < at\sqrt{2Q} \\ 0 & \text{für} \quad |x| > at\sqrt{2Q} \end{cases}$$

Ein ähnliches Verhalten zeigt die nach (41) erhaltene

2.) Ähnlichkeitslösung, die sich auf die Anfangsverteilung

$$(44) \quad \varrho(x,o) = g(x) = \varrho_r + \Delta\varrho\,\Theta(-x)$$

zurückführen läßt und die damit die Expansion eines dichten Gases ϱ_l in ein dünnes Gas ϱ_r beschreibt. Mit den Bezeichnungen aus (40): $\Delta\varrho = \varrho_l - \varrho_r \gg \varrho_r$ und $K = \ln \frac{\Delta\varrho}{\varrho_r} \gg 1$ erhält man zu (41.3):

$$(45) \qquad u(z) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(-z^2)}{\operatorname{erfc}(z) + 2\, e^{-K}}$$

und der Ersetzung (35) das Standard-Beispiel zur Stoßwellenlösung der Burgers-Gleichung (vgl. Abschnitt 4.4). Dieser Ausdruck geht im Grenzfall $K \longrightarrow \infty$ in die Kellersche Lösung (vgl. (23.3)) über, in der der stoßwellenartige Charakter nicht mehr erkennbar ist. Unter Benutzung der asymptotischen Entwicklung der komplementären Fehlerfunktion (vgl. Anhang 8.3) gilt näherungsweise in (45):

$$(46.1) \quad u(z) \longrightarrow \frac{x}{t}\left\{1 + 2z\sqrt{\pi} \exp\left[-K(1 - \frac{z^2}{K})\right]\right\}^{-1} ,$$

und man erhält die sogenannte Dreieckswelle (vgl. Abb. 4.4) mit dem Grenzfall für $K \longrightarrow \infty$:

$$(46.2) \qquad u(x,t) \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{für} \quad 0 < x < at\sqrt{2K} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

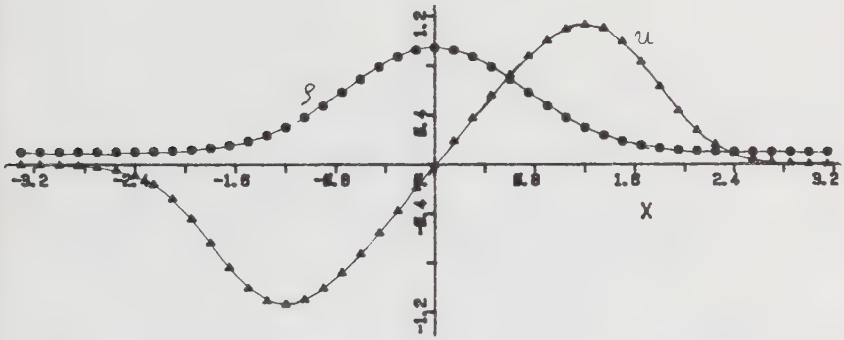


Abb. 4.2 "N-Welle"

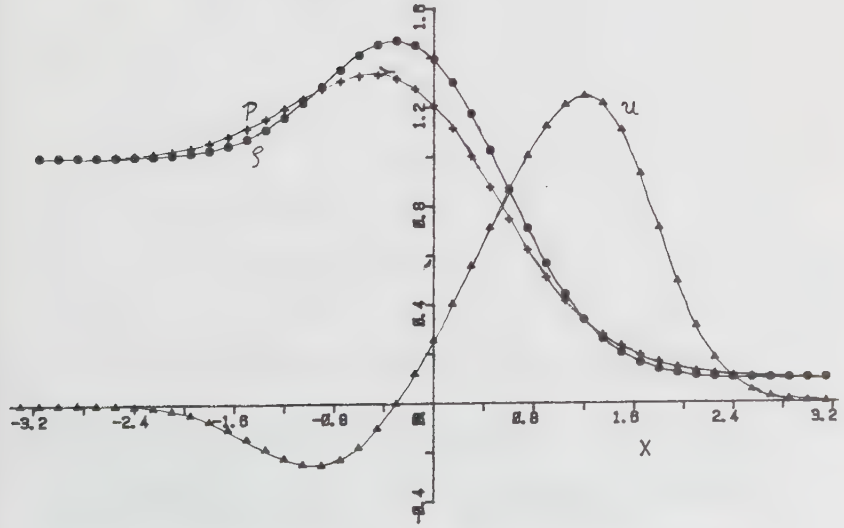


Abb. 4.3 verschobene "N-Welle"

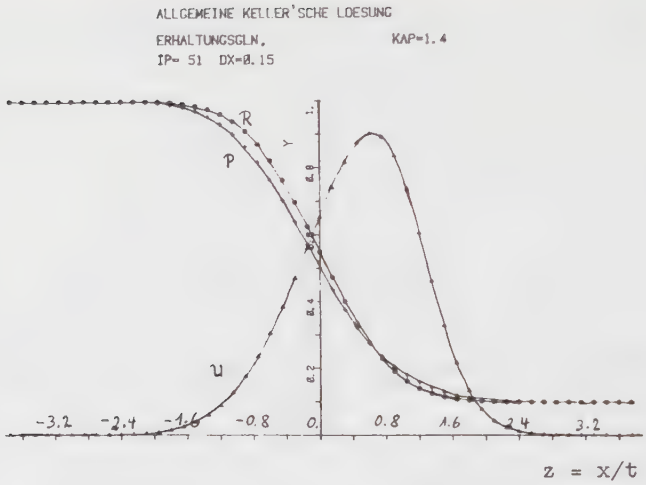


Abb. 4.4: "Dreieckswelle"

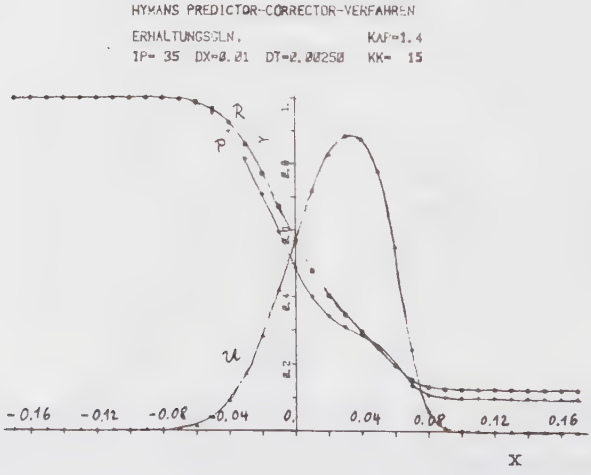


Abb. 4.4': "Dreieckswelle" nach gasdynamischer Berechnung (vgl. Abschnitt 6.5)

● VERLAUF DER MASSENDICHTE R(X,T)
▲ VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(X,T)
+ VERLAUF DES DRUCKES P(X,T)

Die untere Abbildung zeigt zum Vergleich eine gasdynamische Berechnung mittels eines Differenzen-Verfahrens

In der Lösungsmannigfaltigkeit der Differentialgleichungen für $\varrho(x,t)$ und $u(x,t)$ sind auch

3.) periodische Wellen enthalten. Man erhält sie z.B., indem man als Anfangsverteilung für die Massendichte ϱ zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Summe von Masse-Polen mit äquidistantem Abstand $2L$ wählt:

$$(47.1) \qquad \varrho(x,o) = g(x) = \mathcal{M} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2n \cdot L) \ .$$

Die zeitliche Entwicklung der Größen $\varrho(x,t)$ und $u(x,t)$ ergibt dann eine zunächst zeitlich gedämpfte stehende Welle:

$$(47.2) \qquad \varrho(x,t) = \frac{\mathcal{M}}{at\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ - \frac{(x-2nL)^2}{2a^2t^2} \right\}$$

$$(47.3) \qquad u(x,t) = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x-2nL}{t} \exp\left\{ - \frac{(x-2nL)^2}{2a^2t^2} \right\}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{ - \frac{(x-2nL)^2}{2a^2t^2} \right\}} \ ,$$

wobei sich diese Lösungen auch als Fourier-Entwicklungen darstellen lassen:

$$(48.1) \qquad \varrho(x,o) = g(x) = \frac{\mathcal{M}}{L}\left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$(48.2) \qquad \varrho(x,t) = \frac{\mathcal{M}}{L}\left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2 \cdot \frac{t^2}{\tau^2}\right) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \right\}$$

$$(48.3) \qquad u(x,t) = \frac{2\pi a^2 t}{L} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n \exp\left(-n^2 \cdot \frac{t^2}{\tau^2}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right)}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-n^2 \frac{t^2}{\tau^2}\right) \cdot \cos\left(n \frac{x}{L}\right)}$$

mit der Relaxationszeit $t_{relax} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{L}{a} =: \tau$.

Im Falle großer Zeiten $t \gg \tau$ wird der erste Term der Entwicklung $(n=1)$ dominieren, so daß sich asymptotisch wieder eine "verschmierte" Diffusionslösung einstellt:

$$(49) \qquad u(x,t) \longrightarrow \frac{2\pi a^2 t}{L} \exp\left(- \frac{t^2}{\tau^2}\right) \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \ .$$

Durch Galilei-Transformation kann man dann zu wirklich laufenden Wellen übergehen, jedoch sind in dieser Weise beschriebene Wellen nicht durch eine typische Phasengeschwindigkeit ausgezeichnet.

4.6 Zur Gay-Lussac'schen freien Expansion

Für die explizite Berechnung der Entropieänderung legen wir ein einfaches Modell zum Versuch von Gay-Lussac zugrunde, in dem die isotherme Expansion eines Gases ins Vakuum untersucht werden soll. Hierbei gehen wir von einem endlichen Kasten der Gesamtlänge L aus, dessen Wände bei $x = o$ und $x = L$ (ideal) elastisch reflektierend sein sollen (vgl. Abb. 4.5). In dem einen Teil des Kastens möge sich ein dichtes Gas befinden, welches durch eine Membran bei $x = l < L$ vom Vakuum des übrigen Teiles getrennt sei. Platzt die Membran zum Zeitpunkt $t = 0$, so kann das Gas frei ausströmen.

Die Anfangsbedingung zur Verteilungsdichte $f(x,v,t)$ setzen wir gemäß (6)

(50.1) $f(x,v,o) = g(x)\cdot h(v)$ mit $h(v) = (a\sqrt{2\pi})^{-1}\exp(-\frac{v^2}{2a^2})$

und erhalten aufgrund der freien Teilchenströmung nach (2) zunächst ohne Berücksichtigung der Wandreflexion bei $x = L$:

(50.2) $$f(x,v,t) = g(x-vt)\cdot h(v) \ .$$

Die vorhandene Gasmasse mit $g(x,o) = g(x)$ sei endlich und anfangs gleichmäßig verteilt:

(50.3) $$g(x) = \frac{M}{l}\theta(l-x) \qquad \int_0^L g(x)\,dx = M .$$

Um für dieses endliche Problem die bisherigen Ergebnisse verwenden zu können, betrachten wir ein analoges symmetrisches Problem mit einer periodischen Lösung, welches das hier zu untersuchende ursprüngliche Problem einschließt:

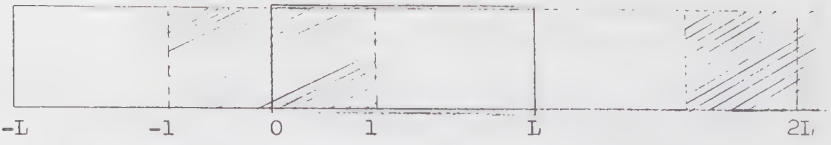


Abb. 4.5 : Freie Expansion bei reflektierenden Wänden

Hierzu definieren wir eine Funktion $\bar{f}(x,v,o)$, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt ist und die mit $f(x,v,o)$ für $o \leq x \leq L$ übereinstimmt: Für $\bar{f}$ gelten dann die Symmetriebedingungen:

(51) $\bar{f}(x,v,o) = \bar{f}(-x,-v,o)$ und $\bar{f}(x+2L,v,o) = \bar{f}(x,v,o)$.

Die Periodizität der Verteilung f legt den Ansatz einer Fourier-Entwicklung von g nahe (vgl. Abschnitt 4.5, Bsp.3):

(52.1) $$g(x) = \frac{\mathcal{M}}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \cos(n\pi\frac{x}{L})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

(52.2) $$g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cdot\cos(n\pi\frac{x}{L})dx = \frac{2\mathcal{M}}{n\pi l}\sin(n\pi\frac{l}{L}) .$$

Die zeitliche Entwicklung gemäß (50.2) ergibt dann:

(52.3) $$g(x-vt) = \frac{\mathcal{M}}{L} + \frac{2\mathcal{M}}{\pi l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\frac{l}{L})\cdot\cos\left[\frac{n\pi}{L}(x-vt)\right] .$$

Wir führen dimensionslose Größen ein:

(53) $$r := \frac{l}{L} \qquad \xi = \frac{x}{L} \qquad \tau = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{at}{L} \qquad \varphi = \frac{v}{a\sqrt{2}} .$$

Die zeitlichen Orts- und Geschwindigkeitsverteilungen

(54.1) $$q(x,t) = \int_{\mathbb{R}} dv\, f(x,v,t) \qquad h^*(v,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\mathcal{M}} f(x,v,t)$$

lassen sich (mit $g^* = \frac{L}{\mathcal{M}} q$) explizit angeben:

(54.2) $$g^*(\xi,\tau) = 1 + \frac{2}{\pi}\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi r)\cos(n\pi\xi)\exp(-n^2\tau^2)$$

(54.3) $$h^*(\varphi,\tau) = h(\varphi)\left\{1+\frac{4}{r\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)\pi r]}{(2n-1)^2}\sin[2(2n-1)\tau\varphi]\right\} .$$

Während über die Relaxationszeiten $\tau_n = \frac{\sqrt{2}}{n\pi}\frac{L}{a}$ die Orts-Verteilung irreversibel einem Gleichgewichtszustand mit $q(x,\infty) = \frac{\mathcal{M}}{L}$ zustrebt, handelt es sich bei der Geschwindigkeits-Verteilung infolge des oszillierenden Faktors in (54.3) für alle Zeiten um eine Nicht-Gleichgewichts-Verteilung. Dies beruht natürlich auf der Voraussetzung, daß Stöße unberücksichtigt geblieben sind. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß diese Irreversibilität auftritt, obwohl $q(x,t)$ ja nach (9) Lösung einer Differentialgleichung ist, welche invariant unter Zeitumkehr ist.

Wir benutzen nach Robertson /58/, Hobson/Loomis /26/ und

Lee /39/ die folgenden "Entropie-Definitionen", worin dimensionslose ln-Argumente betrachtet werden (vgl. Abschnitt 1.3):

$$(55.1)\quad \mathcal{S}(\tau) := -\int_{\mathbb{R}} d\varphi \int_0^1 f^*(\xi,\varphi,\tau)\,\ln f^*(\xi,\varphi,\tau)\,d\xi$$

$$(55.2)\quad \mathcal{S}_\xi(\tau) := -\int_0^1 g^*(\xi,\tau)\,\ln g^*(\xi,\tau)\,d\xi$$

$$(55.3)\quad \mathcal{S}_\varphi(\tau) := -\int_{\mathbb{R}} h^*(\varphi,\tau)\,\ln h^*(\varphi,\tau)\,d\varphi\ .$$

Die Integrationen lassen sich nach Einsetzen von (54) geschlossen durchführen, und man erhält für die Gesamt-Entropie $\mathcal{S}(\tau)$:

$$(56.1)\quad \mathcal{S}(\tau) = \ln r + \tfrac{1}{2}(1+\ln\pi) = \mathcal{S}(o)\ ,$$

sowie für die Anfangs- und Endzustände für $\mathcal{S}_\xi$ und $\mathcal{S}_\varphi$:

$$(56.2)\quad \mathcal{S}_\xi(o) = \ln r \qquad \mathcal{S}_\xi(\infty) = 0 \qquad \mathcal{S}_\varphi(o) = \tfrac{1}{2}(1+\ln\pi)$$

$$(56.3)\quad \mathcal{S}_\varphi(\infty) = \begin{cases} \tfrac{1}{2}(1+\ln\pi) + r - \ln 2 & \text{für } r < 1/2 \\ \tfrac{1}{2}(1+\ln\pi) + 1 - r + \ln r & \text{für } r > 1/2 \end{cases}\ .$$

Somit ergeben die einzelnen Entropieänderungen bzgl. der Orts- und der Geschwindigkeitsverteilungen für den Fall nicht berücksichtigter Stöße:

$$(57.1)\quad \Delta\mathcal{S}_\xi := \mathcal{S}_\xi(\infty) - \mathcal{S}_\xi(o) = -\ln r > 0$$

$$(57.2)\quad \Delta\mathcal{S}_\varphi := \mathcal{S}_\varphi(\infty) - S_\varphi(o) = \left\{ \begin{array}{ll} r-\ln 2 & \text{für } r < 1/2 \\ 1+\ln(r)-r & \text{für } r > 1/2 \end{array} \right\} < 0,$$

sowie die summierte Entropieänderung:

$$(57.3)\quad \Delta\mathcal{S}_\xi + \Delta\mathcal{S}_\varphi = \left\{ \begin{array}{ll} r-\ln(2r) & \text{für } r < 1/2 \\ 1-r & \text{für } r > 1/2 \end{array} \right\} > 0\ .$$

Dies bedeutet, daß man nach (57.1) Information bzgl. der Teilchenpositionen verliert und nach (57.2) Information bzgl. der Teilchengeschwindigkeiten gewinnt.

Der Verlust ist jedoch stets größer als der Gewinn, wobei dieser Nettoverlust an Information übergeht in die Korrelation zwischen Orts- und Geschwindigkeitsverteilung, die anfangs statistisch unabhängig und damit unkorreliert gewesen

sind. Die Gesamtinformation über das vollständige System bleibt natürlich nach (56.1) - oder genauer nach dem Liouville'schen Theorem - konstant.

Im realen Gay-Lussac-Experiment sind Stöße maßgeblich von Bedeutung, wodurch die oszillierenden Terme in (57.2) verschwinden und damit $h(v)$ erhalten bleibt.

Wie in Abschnitt 1.3 ausgeführt, ist die Definition der Entropie für Nichtgleichgewichtsverhältnisse nicht eindeutig. Aufgrund 1(20) müßte (55.1) als Entropieänderung $\Delta\mathcal{S} := \mathcal{S}(t)-\mathcal{S}(0)$ verwendet werden, der gasdynamischen Betrachtung jedoch entspricht die Definition (57.3) als "summierte" Entropieänderung. Dieses wird sich bei der numerischen Berechnung des folgenden Abschnitts zeigen.

4.7 Diskussion und numerische Verallgemeinerung

Die bisherige Betrachtung dieses Kapitels ging von dem Grenzfall großer Knudsen-Zahlen $Kn := \lambda/L$ aus. Hierfür gilt, daß die mittlere freie Weglänge λ sehr viel größer als eine charakteristische makroskopische Längenabmessung L ist. In der Boltzmann-Gleichung 1(25):

$$(58) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t'}+\underline{v}'\frac{\partial}{\partial \underline{x}'}\right) f(\underline{x}',\underline{v}',t') = Kn^{-1}C(f'f')$$

ist dann das Stoßintegral $C(ff)$ vernachlässigbar und die verbleibende "stoßfreie Boltzmann-Gleichung" ist als Bestimmungsgleichung für die Verteilungsfunktion f der freien Molekularströmung lösbar durch:

$$(59) \qquad f(\underline{x},\underline{v},t) = f_0(\underline{x}-\underline{v}t,\underline{v},o) \quad .$$

In der Herleitung der Momentenbeziehungen in 4.1 mußten wir damit unendlich große Geschwindigkeiten $\underline{v}$ und bei der Variablensubstitution (3) auch unendlich große räumliche Abstände zulassen.

Im anderen Grenzfall kleiner Knudsen-Zahlen $Kn \ll 1$ ist das Stoßintegral $C(ff)$ von wesentlicher Bedeutung und man erhält als Verteilungsfunktion die Maxwellsche f_1 des lokalen

thermodynamischen Gleichgewichts 1(21):

$$(60) \qquad f(x,v,t) = f_1(\underline{x},\underline{v},t) = f_1(\underline{v};\varrho,\underline{u},T) \quad ,$$

worin $\varrho,\underline{u},T$ nach 1(14) als Geschwindigkeitsmittelungen definiert sind und die Euler-Gleichungen der idealen Gasdynamik 2(8) erfüllen.

In Verallgemeinerung der stoßfreien kinetischen Betrachtung dieses Kapitels und im Hinblick auf den Vergleich mit den gasdynamischen Lösungen wollen wir diese beiden durch (59) und (60) gegebenen Lösungswege miteinander kombinieren in der Art, daß wir uns eine makroskopische Zeit t in Teilintervalle Δt , die kleiner als die mittlere freie Flugzeit sind, unterteilt denken. Nehmen wir an, daß zu einem Anfangszeitpunkt t_o eine lokale Maxwell-Verteilung f_1 vorliege, so gilt für dieses Zeitintervall Δt :

$$(61.1) \qquad f(\underline{x},\underline{v},t_o+\Delta t) = f_1(\underline{x}-\underline{v}\Delta t,\underline{v},t_o) \quad .$$

Über den nun einsetzenden Stöße stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand ein ("Thermalisierung"), wobei die Größen $\varrho,\underline{u},T$ zu der Zeit $t_1=t_o+\Delta t$ ((zumindest numerisch) berechnet werden können:

$$(61.2) \qquad \begin{aligned} \varrho &= \langle f|1\rangle & \varrho\,\underline{u} &= \langle f|\underline{v}\rangle \\ e &= \tfrac{1}{2}\langle f|\underline{v}^2\rangle = \tfrac{f}{2}\,(nRT + \underline{u}^2) \end{aligned}$$

Für die numerische Berechnung - nur eindimensional, vgl. Kapitel 3 und 6 - wird eine räumlich-zeitliche Diskretisierung eingeführt:

$$(62.1) \qquad x_j = j\,\Delta x \qquad t_n = n\,\Delta t \qquad g_j^n := g(x_j,t_n) \quad ,$$

so daß für die jeweilige Maxwell-Verteilung f_1 gilt:

$$(62.2) \qquad f_1(x_j,v,t_n) = \frac{\varrho_j^n}{\sqrt{2\pi RT_j^n}}\ \exp\left\{ - \frac{(v-u_j^n)^2}{2RT_j^n} \right\} \quad ,$$

worin die Strömungsgrößen ϱ_i^n, u_i^n, T_i^n als gespeicherte Daten vorliegen und für die Lösungsfunktion $f_1(x_j,v,t_{n+1})$ mit Hilfe der Translation

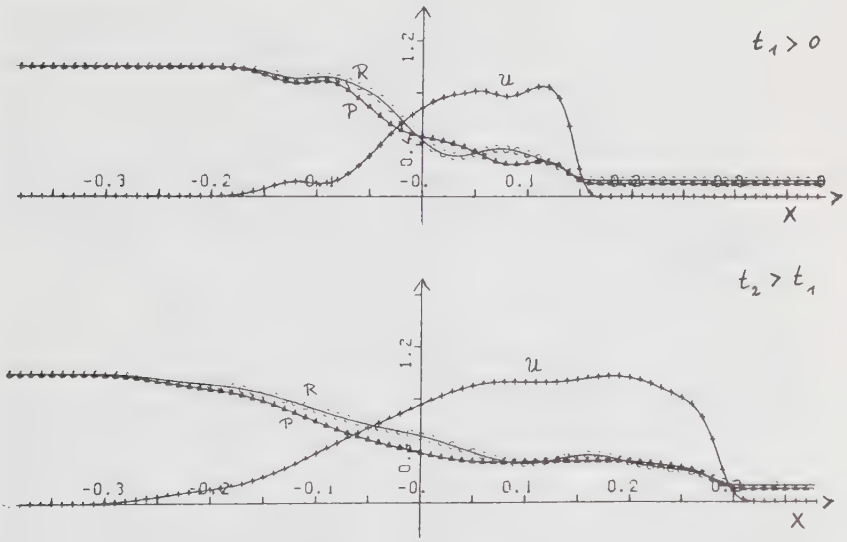
$$(62.4) \qquad x_j \longrightarrow x_j - v\Delta t$$

mittels Spline-Interpolation neu berechnet werden können.

Zur Begrenzung der diskreten Raum-Zeit-Zelle (vgl. Kapitel 6) dient die über die Charakteristikenscharen $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ abgeleitete Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (vgl. Courant & Friedrichs /18/):

$$\max_j \left(|u_j^n| + c_j^n \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad . \tag{62.5}$$

Als Anwendungsbeispiele seien - entsprechend den Anfangswerten der linearen Lösungen des Kapitels 3, vgl. Abb. 3.1 - eine gestörte Dreieckswelle (Abschnitt 4.5) und die zeitliche Entwicklung der ungestörten Anfangsverteilung nach 3(8) betrachtet:



○ VERLAUF DER MASSENDICHTE R(X,T)
△ VERLAUF DES DRUCKES P(X,T)
+ VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(X,T)

Abb. 4.6 zeitliche Entwicklung einer Anfangsstörung

Infolge des diffusionsartigen Charakters der Lösung wird jede Störung im Laufe der Zeit "verschmiert" und man erhält asymptotisch den Lösungsverlauf zur ungestörten Verteilung (vgl. Abschnitt 6.5) .

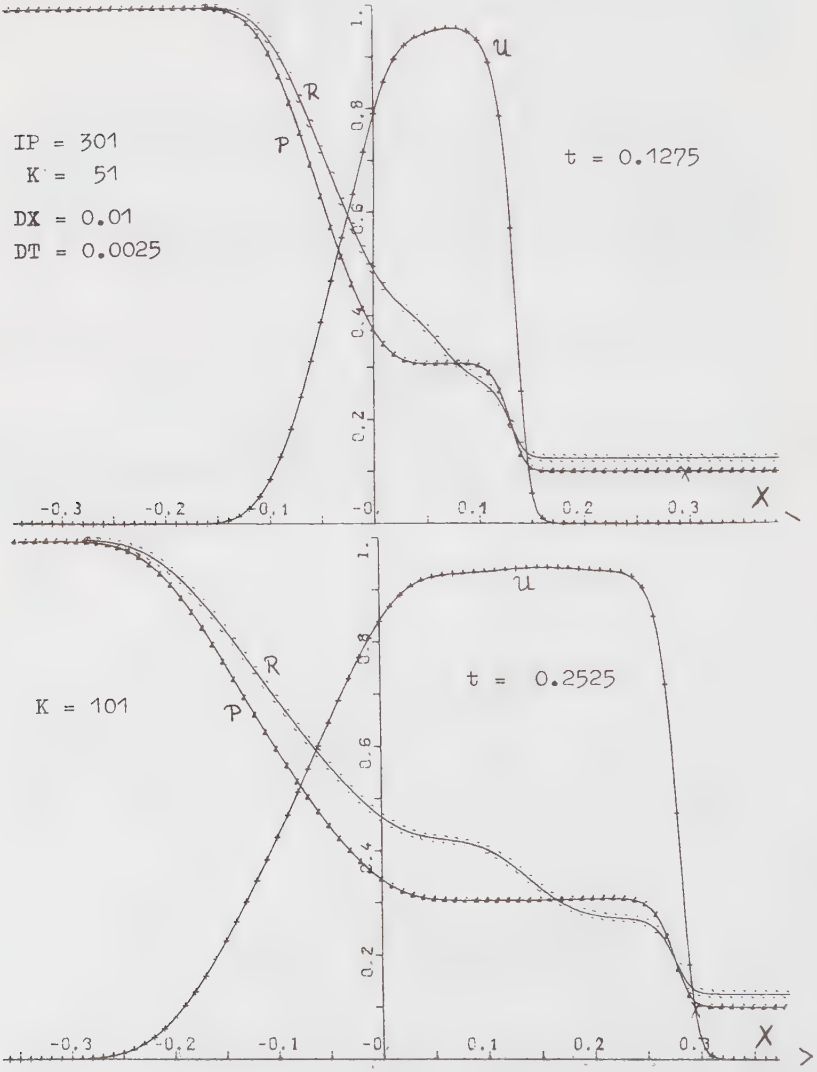


Abb. 4.7 Zeitliche Entwicklung der Anfangsverteilung 3(8)

5. Analytische Behandlung der eindimensionalen Expansionsströmung in der idealen anisentropen Gasdynamik

In diesem Kapitel wird die eindimensionale instationäre Gasströmung bei spezieller Berücksichtigung variabler Entropiedichte s auf der Grundlage der idealen Gasdynamik betrachtet. Bei solchen instationären Vorgängen in Gasen handelt es sich allgemein um die Ausbreitung nichtlinearer Wellen, weshalb das mögliche Auftreten von Stoßwellen bei der Beschreibung zu berücksichtigen ist.

5.1 Das Gleichungssystem der idealen anisentropen Gasdynamik

Das für gasdynamische Probleme variabler Entropiedichte s, bei denen die Strömungsgeschwindigkeit u im Bereich der Größenordnung der lokalen Schallgeschwindigkeit c liegt, geeignete (selbst-konsistente) Basisgleichungssystem ist nach Abschnitt 2.3 (vgl. auch /53/) gegeben durch:

$$(1.1)\quad c_t + uc_x + \frac{\varkappa-1}{2} cu_x = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$(1.2)\quad u_t + uu_x + \frac{2}{\varkappa-1} cc_x = \frac{c^2}{\varkappa R} s_x \qquad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$(1.3)\quad s_t + us_x = 0 \qquad \text{Entropiegleichung},$$

worin $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ der Polytropenexponent, $R = c_p - c_v$ die spezifische Gaskonstante bedeuten. Dem Faktor $\frac{2}{\varkappa-1}$ entspricht dabei in den kinetischen Gleichungen die Anzahl der Freiheitsgrade.

Die übrigen thermodynamischen Größen erhält man über die Zustandsgleichungen eines perfekten Gases (vgl. 1.1):

$$(2.1)\quad c^2 = \varkappa \frac{p}{\varrho} = \varkappa RT \qquad p = p_o \left(\frac{\varrho}{\varrho_o}\right) \exp\left[\frac{\varkappa-1}{R}(s-s_o)\right]$$

$$(2.2)\quad p = p_o \left(\frac{c}{c_o}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}} \exp\left[-\frac{s-s_o}{R}\right]$$

$$(2.3)\quad \varrho = \varrho_o \left(\frac{c}{c_o}\right)^{\frac{2}{\varkappa-1}} \exp\left[-\frac{s-s_o}{R}\right],$$

bezogen auf die Größen des ungestörten Mediums (Index o).

tig ändern können. Man vergleiche dazu die linearen Lösungen des Kapitels 3.

Die charakteristischen Kurven trennen Bereiche, in denen die Strömung jeweils durch stetig differenzierbare Funktionen beschrieben werden kann. Das Verhalten der Lösung in einem bestimmten Punkt der x-t-Ebene braucht dann nicht notwendig durch sämtliche Anfangs- und Randwerte bestimmt zu sein, sondern lediglich durch die Kurvenstücke, die von den - durch diesen Punkt hindurchgehenden - Charakteristiken eingeschlossen sind.

Im isentropen Fall (s = const) sind die Riemannschen Invarianten

$$\Gamma^{\pm} := u \pm \frac{2}{\varkappa - 1} c$$

bekannt (vgl. die Lösung der einfachen Wellen, Abschnitt 2.3), im Falle variabler Entropie jedoch nicht. Dies bedeutet z.B., daß das numerische Charakteristikenverfahren (vgl. /16/) hier nicht anwendbar ist.

Eine andere Möglichkeit zur Lösung des Gleichungssystems (1) besteht darin, dieses System über Ähnlichkeitstransformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen.

Eine Verallgemeinerung des Burgers'schen Ähnlichkeitsansatzes (vgl. 2.4) in der Form:

$$\zeta = \frac{x}{(\pm c_o t)^n} \qquad \frac{c}{c_o} = x^{1-\frac{1}{n}} F_1(\zeta)$$

(6)

$$\frac{u}{c_o} = x^{1-\frac{1}{n}} F_2(\zeta) \qquad \frac{s-s_o}{c_p} = F_3(\zeta) + A \ln x$$

stammt von Guderley (vgl. /53/) und führt auf ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Funktionen $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ und $F_3(\zeta)$, worin n und A noch freie Konstanten sind, die sich bei der Burgers'schen Lösung als $n = 1$ und $A = o$ ergeben.

Im folgenden suchen wir jedoch nicht den Weg über eine einzige Ähnlichkeitsvariable, sondern werden mit Hilfe charakteristischer Variablen das System (1) entkoppeln.

5.2 Folgerungen aus der Lagrange-Formulierung

Bei der Beschreibung einer Strömung in Lagrange-Variablen (vgl. Anhang 8.1) benutzt man ein mit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit u mitbewegtes Koordinatensystem. Als neue unabhängige Ortsvariable dient dabei der substantielle Ort $a = a(x,t)$, der sich durch die Differentialgleichung der Bahnlinien (der Teilchen):

$$(7.1) \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right\} a(x,t) = 0$$

beschreiben läßt. In den neuen Koordinaten gilt dann mit $x = x(a,t)$:

(7.2) Strömungsgeschwindigkeit $u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$

(7.3) Dilatation $D = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t$.

Aus Gründen der Integrabilität von $x(a,t)$ muß folglich gelten:

$$(7.4) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_t = \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)_a \quad .$$

Die Ableitungen in den ursprünglichen (sogenannten Euler'schen) Koordinaten transformieren sich dann auf die neuen substantiellen (oder Lagrange-) Koordinaten in der Form:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a - \frac{u}{D}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_t \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_t = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_t \ .$$

Man erhält daraus die substantielle (Zeit-)Ableitung:

$$(8) \qquad \frac{d}{dt} := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_t \ .$$

Die entsprechende Darstellung der gasdynamischen Grundgleichungen (1) in den Lagrange-Variablen sieht dann wie folgt aus:

$$(9.1) \quad \left(\frac{\partial c}{\partial t}\right)_a = -\frac{\varkappa-1}{2}\frac{c}{D}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_t \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$(9.2) \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_a = -\frac{2}{\varkappa-1}\frac{c}{D}\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)_t + \frac{c^2}{\varkappa R}\frac{1}{D}\left(\frac{\partial s}{\partial a}\right)_t \qquad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$(9.3) \quad \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_a = 0 \qquad \text{Entropiegleichung}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich einige Folgerungen ziehen:

1.) Aus Gleichung (9.3) $s_t = 0$ folgt direkt mit einer

noch zu bestimmenden Funktion f :

$$(10.1) \qquad s(a,t) = \varkappa R f(a) \ .$$

Dies bedeutet speziell: falls zu irgendeinem Zeitpunkt t_o für ein bestimmtes Massenelement gilt: $s = \text{const}$, dann gilt dies auch für alle Zeiten t für dieses Massenelement.

2.) Mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingung (7.4): $u_a = D_t$ läßt sich (9.1) ebenfalls direkt lösen:

$$(10.2) \quad c(a,t) = g(a)\, D^{-\frac{\varkappa-1}{2}} \quad \text{mit} \quad D = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t \quad \text{gemäß (7.3).}$$

3.) Aus den Differentialgleichungen für die thermodynamischen Größen

$\varrho_t + \frac{\varrho}{D} u_a = 0$ Massendichte, $p_t + \frac{p}{D} u_a = 0$ Druck

erhält man entsprechend 2.) die allgemeinen Lösungen:

$$(10.3) \qquad \varrho(a,t) = r(a)\, D^{-1}$$

$$(10.4) \qquad p(a,t) = q(a)\, D^{-\varkappa} \ ,$$

wobei die vier Funktionen f, g, r und q nicht unabhängig voneinander sind (Normierung gemäß (3)):

$$g(a) = \sqrt{\varkappa \frac{q(a)}{r(a)}} \qquad f(a) = \frac{1}{\varkappa(\varkappa-1)} \left[\ln q(a) - \varkappa \ln r(a) \right] \ .$$

4.) Für die Gleichung (9.2) bzw. deren Entsprechung nach (2): $u_t + \frac{1}{\varrho D} p_a = 0$ erhält man einerseits nach (10.3) mit $\varrho D = r(a)$: $u(a,t) = v(a) + \frac{1}{r(a)} \int_{t_o}^{t} dt' p_a(a,t')$ und andererseits:

$$(10.5) \quad u(a,t) = v(a) + \frac{1}{g^2(a)} \int_{t_o}^{t} dt' D^{-\varkappa} \frac{\partial}{\partial a} \left[f(a) - \frac{2}{\varkappa-1} \ln c(a,t') \right] .$$

Bei Kenntnis der Transformation (7) sind damit die allgemeinen Lösungen des Systems (1) über die Gleichungen (10) bekannt.

Diese Erkenntnisse sowie die Ergebnisse der isentropen Betrachtung mit der Burgers'schen Ähnlichkeitslösung des Abschnitts 2.4 fassen wir im folgenden Abschnitt zusammen.

5.3 Darstellung in charakteristischen Variablen

Für die weiteren Betrachtungen ist es zweckmäßig, anstelle der Ortskoordinate x die Ähnlichkeitsvariable $z = \frac{x}{t}$ einzuführen.

Die Grundgleichungen (1) nehmen dann die folgende Gestalt an:

(11.1) $$t\,\dot{c} + (u-z)\,c' = -\frac{\varkappa-1}{2}\,c\,u'$$

(11.2) $$t\,\dot{u} + (u-z)\,u' = -\frac{2}{\varkappa-1}\,c\,c' + \frac{c^2}{\varkappa R}\,s'$$

(11.3) $$t\,\dot{s} + (u-z)\,s' = 0$$

mit $z = \frac{x}{t}$: $\dot{} := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z$ und $' := \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_t$.

Entsprechend der Lagrange-Darstellung (Abschnitt 5.2) ist in diesen Variablen die Differentialgleichung der Teilchenbahnen (7.1) gegeben durch: $y := a/t_o$

(12.1) $$t\,\dot{y} + (u-z)y' = 0 \quad ,$$

woraus nach (11.3) sofort $s = s(y)$ bzw. $y = y(s)$ folgt, d.h.:

(12.2) $$s(z,t) = \varkappa R f(y) \quad .$$

Wählen wir nun y statt der Zeit t als neue unabhängige Variable, so gelten über die Funktionaldeterminante (vgl. Anhang 8.1)

$$J = \frac{\partial(z,y)}{\partial(z,t)} = \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_z$$ die Beziehungen:

(13.1) $$\dot{y} = J \qquad y' = -J\cdot t_z \qquad 1 = J\cdot t_y \quad .$$

Wegen (12) gilt damit für die jetzt abhängige Variable $t = t(y,z)$:

(13.2) $$t = (u-z)\cdot t_z \quad \text{oder} \quad t(y,z) = t(y,z_o)\cdot \exp\left\{\int_{z_o}^{z} \frac{d\xi}{u(y,\xi)-\xi}\right\},$$

und für die ebenfalls abhängige Variable $x = zt = x(y,z)$ gilt:

(13.3) $$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{\partial}{\partial y}(zt) = z t_y$$

(13.4) $$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = \frac{\partial}{\partial z}(zt) = t + z t_z = u t_z \quad .$$

Das so transformierte Gleichungssystem (11) ergibt sich dann mit $y' = -t_z t_y^{-1}$ zu:

$$(14.1) \quad (u-z)c_z = -\frac{\varkappa-1}{2} c(u_z + u_y y')$$

$$(14.2) \quad (u-z)u_z = -\frac{2}{\varkappa-1} c(c_z + c_y y') + \frac{c^2}{\varkappa R}(s_z + s_y y')$$

$$(14.3) \quad (u-z)s_z = 0 \ .$$

Hieraus lassen sich sofort einige Sonderlösungen ablesen:

1.) Für Bereiche konstanter Strömungsgeschwindigkeit folgt mit $s = \varkappa R f(y)$ gemäß (10.1) bzw. (12.2) und $c = c(y)$ nach (14.1) aus (14.2):

$$(15) \quad c(y,z) = c_o \exp\left[\frac{\varkappa-1}{2} f(y)\right] \qquad \text{für} \quad u = u_o \ .$$

2.) Für den Vakuumrand des Mediums ($c = 0$) ergibt sich eine rein kinematische Strömung:

$$(16) \quad u(y,z) = z \qquad \text{mit} \qquad c(y,z) = 0 \ .$$

3.) Im isentropen Fall ($s = \text{const}$) erhält man die bekannten Lösungen von Burgers (vgl. 2.4), wenn man ansetzt:

$$(17.1) \quad u = u(z) \qquad c = c(z) \qquad s = \text{const} \ .$$

Damit entfällt die y-Abhängigkeit, und man erhält zwei einfache gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen, die sich durch Vergleich sofort lösen lassen:

$$(17.2) \quad c' = \pm\frac{\varkappa-1}{2} u' \qquad \text{bzw.} \qquad c = c_o \mp \frac{\varkappa-1}{2}(u-u_o) \ ,$$

womit sich in diesem Spezialfall die Riemannschen Invarianten $\Gamma^{\pm} = u \pm \frac{2}{\varkappa-1} c$ als Konstanten darstellen.

Setzt man (17.2) in (14.2) ein, so findet man:

$$(17.3) \quad \pm c = u - z \ ,$$

oder die expliziten Lösungen für u und c mit $c_M := c_o \pm \frac{\varkappa-1}{2} u_o$:

$$(17.4) \quad u(z) = \frac{2}{\varkappa+1}(z \pm c_M) \qquad c(z) = \mp\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(z \mp \frac{2}{\varkappa-1} c_M) \ .$$

Als allgemeine Beziehungen für die Lösungen der gasdynamischen Gleichungen lassen sich analog (10) angeben:

(18.1) $$s(y,z) = \varkappa R f(y) ,$$

und mit der Hilfsgröße β :

(18.2) $$\beta(y,z) = -(u-z)\frac{t_y}{t_o} = -\frac{t\,t_y}{t_o t_z}$$

läßt sich (14.1) integrieren:

(18.3) $$\beta_z + \frac{2}{\varkappa-1}(\ln c)_z \beta = 0 \quad \text{bzw.} \quad c(y,z) = g(y)\,\beta^{-\frac{\varkappa-1}{2}} .$$

Ebenso ergibt sich aus (14.2), wenn man (18.1) - (18.3) einsetzt:

(18.4) $$u_z = g^2(y)\beta^{\varkappa}\left\{t_z\left(f - \frac{2}{\varkappa-1}\ln g\right)_y - t_y(\ln\beta)_z + t_z(\ln\beta)_y\right\}/t_o$$

Die Lösung für $u = u(y,z)$ erhält man hieraus durch einfache Integration (vgl. (10.5)).

5.4 Exakte Sonderlösung in Verallgemeinerung der Burgers-Lösung

Als Lösungsansatz sei ein in der Variablen z linearer Geschwindigkeitsverlauf gewählt (vgl. Lösung von Burgers (17)) mit $u_M := u_r \pm \frac{2}{\varkappa-1} c_r$:

(19) $$u(z) = u_M + \frac{2}{\varkappa+1}(z-u_M) = z + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(u_M - z) .$$

Hiermit läßt sich Gleichung (12):

(20) $$t\,\dot{y} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(u_M - z)y' = 0$$

z.B. mit Hilfe des Riemannschen Charakteristikenverfahrens (vgl. 2.3) lösen:

1) $$\frac{dz}{u_M - z} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\frac{dt}{t} \quad \text{mit} \quad \ln\frac{z-u_M}{\xi-u_M} = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\ln\frac{t}{t_o} \quad \text{oder}$$

$$\xi = u_M + (z - u_M)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$$

2) $$\frac{d}{dt}y = 0 , \quad \text{also:} \quad y = y_o(\xi) .$$

Fixieren wir diese Transformation auf die Variable y durch $y = \xi$, so gilt:

$$(21) \qquad y = u_M + (z - u_M)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} .$$

Damit ist ebenfalls $t = t(y,z)$ bekannt, sowie $\beta = -(u-z)\frac{t_y}{t_o}$:

$$(22) \qquad \beta = \frac{u_M - z}{u_M - y}\frac{t}{t_o} = \left(\frac{u_M - y}{u_M - z}\right)^{\frac{2}{\varkappa+1}} = \left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{2}{\varkappa+1}} .$$

Dies eingesetzt in (18.3), ergibt für $c(y,z)$ bzw. $c(y,t)$:

$$(23.1) \qquad c = g(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} = g(y)\,\frac{u_M - z}{u_M - y}$$

oder wegen (19) mittels $u = u(z)$

$$(23.2) \qquad c(y,z) = g^*(y)(u-z) \quad \text{mit} \quad g^*(y) := \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{g(y)}{u_M - y} .$$

Gleichung (18.4) liefert dann mit $\beta_y t_z = \beta_z t_y$ nach (22) eine Beziehung zwischen den noch zu bestimmenden Funktionen $f(y)$ und $g(y)$:

$$(24) \qquad u_z = \frac{2}{\varkappa+1} = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,\frac{g(y)}{u_M - y}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(f - \frac{2}{\varkappa-1}\ln g\right) .$$

Hieraus ergibt sich für $g(y)$ eine nichtlineare (gewöhnliche) Differentialgleichung 1. Ordnung vom Bernoulli'schen Typ:

$$(25) \qquad g\,g_y = \frac{\varkappa-1}{2}\,f_y\,g^2 + \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^2(u_M - y) .$$

Die Substitutionen $k(y) := \left[\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\,g(y)\right]^2$ und $\Psi(w) := \frac{\varkappa-1}{2}f(y)$

führen auf die Differentialgleichung: $k' = 2\Psi' \cdot k + 2(u_M - y)$.

Aus deren Lösung $k(y) = e^{2\Psi(y)}\left[\text{const} + 2\int_{u_H}^{y} d\xi\,(u_M - \xi)\,e^{-2\Psi(\xi)}\right]$

folgt für die Koeffizientenfunktion $g = g(y)$:

$$(26) \qquad g(y) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\exp\left[\frac{\varkappa-1}{2}\,f(y)\right]\sqrt{2\int_{y}^{u_H} d\xi\,(u_M - \xi)\cdot\exp\left\{-(\varkappa-1)\,f(\xi)\right\}} ,$$

und hiermit ergeben sich die Lösungen explizit zu:

$$(27.1) \qquad u(z) = u_M + \frac{2}{\varkappa+1}\,(z - u_M) = \frac{2}{\varkappa+1}\,\left(z + \frac{\varkappa-1}{2}\,u_M\right)$$

$$(27.2) \qquad s(y) = \varkappa R\,f(y)$$

$$(27.3)\quad c(y,z) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\frac{u_M-z}{u_M-y}\,e^{\frac{\varkappa-1}{2}f(y)}\sqrt{2\int_y^{u_M} d\xi\,(u_M-\xi)\,e^{-(\varkappa-1)f(\xi)}}\ .$$

Als Spezialfall erhält man für isentrope Verhältnisse, d.h. hier $f(y) = f_o$, natürlich die Lösung von Burgers:

$$c(z) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,(u_M - z) = u - z\ .$$

Anmerkungen:

1.) Die Ergebnisse (27) lassen sich mit Hilfe eines Ansatzes

$$(28.1)\qquad u = u(z) \qquad c = (u-z)\sqrt{1+\varphi(s)}$$

auch direkt aus den Gleichungen (11) erhalten.
Die Funktion $\varphi(s) = \varphi(y)$ gibt dabei die - durch die variable Entropie s resultierende - Abweichung von der Burgers'schen Lösung (17) an. Es gilt dann für die Funktion

$\varphi = \varphi(s)$ mit $\sqrt{1+\varphi(y)} = g^*(y)$ (vgl. 23.2):

$$(28.2)\quad 1+\varphi(y) = -\frac{2\exp\left[(\varkappa-1)f(y)\right]}{(u_M-y)^2}\int_y^{u_M} d\xi\,(u_M-\xi)\exp\left[-(\varkappa-1)f(\xi)\right]$$

$$(28.3)\quad \varphi(y) = \frac{\exp\left[(\varkappa-1)f(y)\right]}{(u_M-y)^2}\int_y^{u_M} d\xi\,\frac{f'(\xi)}{\varkappa-1}\exp\left[-(\varkappa-1)f(\xi)\right](u_M-\xi)^2$$

mit $\varphi(y) \longrightarrow 0$ für $f(y) \longrightarrow \text{const}$.

2.) Ebenso wie die Gleichung für die Entropiedichte s lassen sich die Gleichungen für die Schallgeschwindigkeit c, für die Massendichte ϱ und für den Druck p mit Hilfe der Charakteristikenmethode gemäß (20) lösen. Diese Gleichungen sind nämlich alle von der Form

$$t\,\dot{h} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,(u_M - z)\,h' + \gamma h = 0$$

und haben die Lösung

$$h(z,t) = h_o(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\gamma}\ .$$

Die Umrechnung innerhalb der Variablen y, z und t erfolgt dabei über Beziehung (21):

$$y = u_M + (z - u_M)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\ .$$

Die Lösungen in den Variablen y und t lauten dann (vgl. (10)):

(29.1) $s(y,t) = \varkappa R f(y)$ Entropiedichte

(29.2) $c(y,t) = g(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$ Schallgeschwindigkeit

(29.3) $\varrho(y,t) = r(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{2}{\varkappa+1}}$ Massendichte

(29.4) $p(y,t) = q(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}}$ Druck .

Bei Vorgabe der Lösungsverteilungen zum Zeitpunkt $t=t_o > 0$ (Anfangswertproblem) sind durch die Beziehungen (27) und (29) explizite und exakte Lösungen der anisentropen Gleichungen (1) gegeben.

5.5 Lösung der Gleichungen für ein Randwertproblem

Zur Bestimmung der noch unbekannten Lösungsfunktionen $g(y)$, $f(y)$ und des Geschwindigkeitsparameters u_M gehen wir von den Rankine-Hugoniot-Stoßrelationen aus (vgl. Abschnitt 2.2):

(30.1) $u_1(M) = -\frac{2}{\varkappa+1} c_o (M - M^{-1})$

(30.2) $s_1(M) = \frac{R}{\varkappa-1}\left\{\ln\left[1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1)\right] + \varkappa \ln\left[\frac{(\varkappa-1)M^2+2}{(\varkappa+1)M^2}\right]\right\}$

(30.3) $c_1(M) = c_o \sqrt{1 + 2\,\frac{\varkappa-1}{(\varkappa+1)^2}(\varkappa M^2+1)\,\frac{M^2-1}{M^2}}$.

Die Lösungen u, c und s müssen am linken Rand der Strömung gerade diese Relationen erfüllen.

Für die Geschwindigkeit dieser linken Grenze gilt dann:

(31) $\dot{x}_1(t) = -c_o M(t)$ oder $x_1(t) = x_o - c_o \int_{t_o}^{t} d\tau M(\tau)$.

Den Zeitverlauf der Machzahl $M(t)$ können wir dabei über die Randbedingung:

(32) $u(x_1,t) = u_1(M)$

bestimmen. Substitution von (31) in (19) und (30.1) liefert eine Differentialgleichung für $M = M(t)$:

(33) $(M^2+1)\cdot \dot{M}t = M(1-\frac{M}{M_\infty})$ mit $M_\infty := \frac{2}{\varkappa-1}\frac{c_o}{u_M}$.

Diese Differentialgleichung läßt sich lösen in der Form:

(34) $\ln \frac{t}{t_o} = M_\infty \int_{M_o}^{M} \frac{dN}{N}\frac{N^2+1}{M_\infty-N} = -M_\infty(M-M_o) + \ln \frac{M}{M_o}(\frac{M_\infty-M_o}{M_\infty-M})^{M_\infty^2+1}$

oder

(35) $\frac{t}{t_o} = \frac{M}{M_o}(\frac{M_\infty-M_o}{M_\infty-M})^{M_\infty^2+1}\exp\{M_\infty(M_o-M)\}$.

Die Funktion $t = t(M)$ ist nach (33) (streng) monoton wachsend für $M_\infty > M_o$, analog fallend für $M_\infty < M_o$, damit also auch umkehrbar. ($M = M_o$ führt gemäß (34) auf den trivialen Fall $M = \text{const}$, vgl. Abschnitt 2.4)
Die Umkehrfunktion $M(t)$ ist iterativ berechenbar (vgl. Abb. 5.1 und 5.2 mit $M_o = 1$ bei $t = t_o$). Schnell konvergierende Verfahren für $t \gg t_o$ und $t \ll t_o$ sind:

(36.1) $M^{(n+1)}(t) = M_\infty-(M_\infty-M_o)\sqrt[M_\infty^2+1]{\frac{M^{(n)}}{M_o}\frac{t_o}{t}\exp\{M_\infty(M_o-M^{(n)})\}}$

(36.2) $M^{(n+1)}(t) = M_o\frac{t}{t_o}(\frac{M_\infty-M^{(n)}}{M_\infty-M_o})^{M_\infty^2+1}\cdot\exp\{M_\infty(M^{(n)}-M_o)\}$.

Durch eine einfache numerische Integration ist dann auch der zeitliche Verlauf der linken Grenze der Strömung (nach (31)) zu ermitteln (vgl. Abb. 5.2):

(37) $x_1(t) = x_o - c_o\int_{t_o}^{t} M(\tau)d\tau$ und $z_1(t) = x_1(t)\cdot t^{-1}$.

Ebenso ergibt sich damit nach (22) für die Variable $y(z,t)$ die linke Grenze:

(38) $y_1(t) = u_M + (\frac{x_1(t)}{t} - u_M)(\frac{t}{t_o})^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$.

Für die Lösungsfunktion $f(y)$ muß an der linken Grenze der Strömung gelten:

(39) $s(y_1,t) = s_1(M) = \varkappa Rf(y_1)$,

worin die Funktion $s_1(M)$ nach (30.2), $M = M(t)$ nach (36) und $y_1 = y_1(t)$ nach (38) bekannt ist.

Betrachten wir hierzu nach (38) eine analytische Fortsetzung für $y_1(t)$ in der Art:

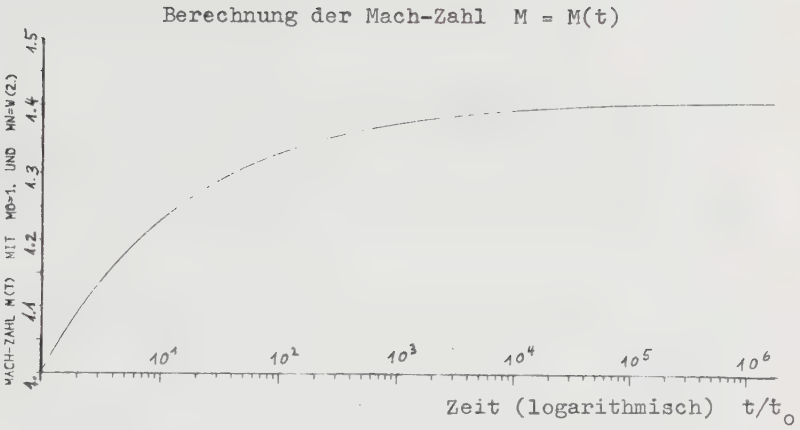


Abb. 5.1: Funktion M = M(t)

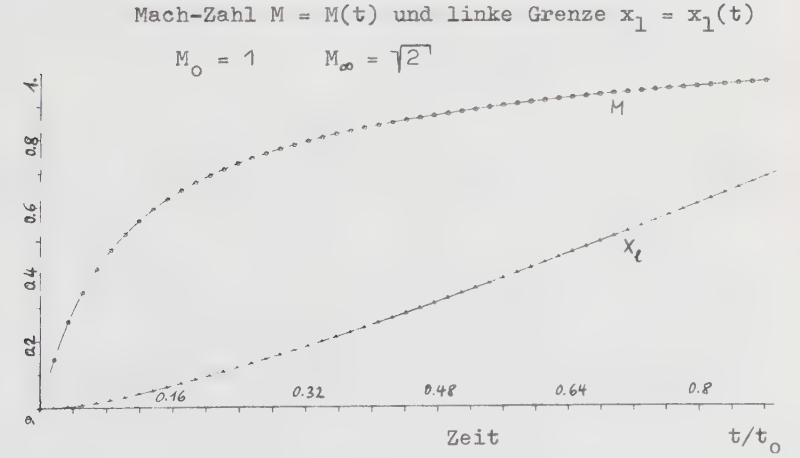


Abb. 5.2: zeitlicher Verlauf der linken Grenze $x_l(t)$

o Mach-Zahl M = M(t)

Δ linke Grenze $x_l = x_l(t)$

$$(40) \qquad y = u_M + \left(\frac{x_1(t^*)}{t^*} - u_M\right)\left(\frac{t^*}{t_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$$

mit $t^* = t$ für $y = y_1$, so läßt sich $t^* = t^*(y)$ iterativ berechnen:

$$(41) \quad t^*(y) = t_o\left(\frac{y-u_M}{z_1^*-u_M}\right)^{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \quad \text{mit} \quad z_1^* = \frac{x_1(t^*)}{t^*} \; .$$

t^* ist dabei der Zeitpunkt des Durchgangs eines Volumenelementes durch die linke Stoßfrontgrenze, zu dem die Machzahl M^* galt.

Mit Hilfe dieser Fortsetzung ist nun die Lösungsfunktion $f(y)$ und damit auch die Entropiedichte $s(x,t)$ nach (27.2) bestimmt:

$$(42) \quad s(x,t) = \varkappa R f(y) = s_1(M^*) \quad \text{mit} \quad M^* = M(t^*) \; .$$

Völlig analoge Überlegungen lassen uns nun auch die Schallgeschwindigkeit $c(x,t)$, sowie die übrigen thermodynamischen Größen, wie Massendichte $\varrho(x,t)$ und Druck $p(x,t)$ nach (29) mit den zugehörigen Rankine-Hugoniot-Bedingungen als Grenzfunktionen berechnen. So gilt für die Schallgeschwindigkeit $c(x,t)$ an der linken Grenze:

$$(43) \qquad c(y_1,t) = c_1(M) = g(y_1)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$$

mit der Funktion $c_1(M)$ nach (30.3). Für $g(y_1)$ gilt dabei $g(y_1) = c_1(M)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}$ und mit Hilfe der analytischen Fortsetzung (41) ist daher auch $c(x,t)$ gegeben:

$$(44) \quad c(x,t) = g(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} = c_1(M^*)\left(\frac{t^*}{t}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \; .$$

Massendichte ϱ und Druck p ergeben sich als:

$$(45.1) \quad \varrho(x,t) = r(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{2}{\varkappa+1}} = \varrho_1(M^*)\left(\frac{t^*}{t}\right)^{\frac{2}{\varkappa+1}}$$

$$(45.2) \quad p(x,t) = q(y)\left(\frac{t}{t_o}\right)^{-\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} = p_1(M^*)\left(\frac{t^*}{t}\right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}} \; .$$

Im folgenden soll nun diese Lösung auf die von Wenk /69/ und Larenz u.Wenk /36/ betrachtete Expansionsströmung bei Erfüllung der globalen Erhaltungssätze angewendet werden.

5.6 Die Homologielösung bei Erfüllung der globalen Erhaltungssätze

In Anlehnung an die Burgers'sche Lösung (17) und die Ergebnisse der v.Weizsäckerschen Arbeitsgruppe /68/ wählte Wenk /69/ bei vorausgesetzter Isentropie im Expansionsgebiet hinter der Stoßfront einen linearen Funktionsansatz für die Verläufe von Strömungs- und Schallgeschwindigkeit bei freier Expansion ins Vakuum:

(46.1) $u = \frac{u_r - u_l}{x_r - x_l}(x - x_r) + u_r$ Strömungsgeschwindigkeit

(46.2) $c = \frac{c_r - c_l}{x_r - x_l}(x - x_r) + c_r$ Schallgeschwindigkeit,

worin u_r die Geschwindigkeit der Expansionsspitze und u_l die der Expansionskante bedeuten, c_r (=0 für Vakuum) und c_l die entsprechenden Werte für die Schallgeschwindigkeit bedeuten. Die Ortskurven der Spitze $x_r(t)$ und der Kante $x_l(t)$ der Expansion lassen sich beschreiben durch:

(46.3) $x_r = u_r t$ rechte Grenze

(46.4) $x_l = -c_o M t$ linke Grenze .

Die Funktionsverläufe von Druck p und Massendichte ϱ sind damit ebenfalls (z.B. über die linken Grenzen) festgelegt:

(47) $\varrho(x,t) = \varrho_l \left(\frac{c}{c_l}\right)^{\frac{1}{\varkappa - 1}}$ $\qquad p(x,t) = p_l \left(\frac{c}{c_l}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}}$.

Mit diesen Ansätzen lassen sich nun die integralen Erhaltungssätze nach Abschnitt 1.1 (für $Re \longrightarrow \infty$) für die globalen Größen der Gesamtmasse $\mathcal{M}$ und des Gesamtimpulses $\mathcal{J}$ im Strömungsgebiet $G = G(t)$ mit $\mathfrak{G} = (x_l, x_r)$ mittels der linearen Ansätze (46) lösen:

(48) $\mathcal{M} = \int_{x_e}^{x_r} \varrho \, dx = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \varrho_l (x_r - x_l) = -\varrho_o x_l$

(49) $\mathcal{J} = \int_{x_a}^{x_r} \varrho u \, dx = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \varrho_l (x_r - x_l) \left\{ \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} u_r + \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} u_l \right\} = \alpha \, p_o t$,

worin α ein noch zu bestimmender Parameter ist und die lineare Zeitabhängigkeit aufgrund des Ansatzes (46) auftreten muß.

Fordert man ferner die Erfüllung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen für Stoßwellen (vgl. (30), Abschnitt 2.2):

$$(50.1)\qquad \frac{p_1}{p_o} = 1 + \frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1) \qquad\qquad \frac{\varrho_o}{\varrho_1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}\left(1-\frac{1}{M^2}\right)$$

$$(50.2)\qquad u_1 = -\frac{2}{\varkappa+1}\frac{c_o}{M}(M^2-1)$$

$$(50.3)\qquad c_1 = c_o\sqrt{1 + 2\,\frac{\varkappa-1}{(\varkappa+1)^2}(\varkappa M^2+1)\left(1-\frac{1}{M^2}\right)}$$

$$(50.4)\qquad s_1 = s_o + \frac{R}{\varkappa-1}\ln\left\{\left[1+\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1)\right]\cdot\left[\frac{(\varkappa-1)M^2+2}{(\varkappa+1)M^2}\right]^{\varkappa}\right\},$$

so folgt aus (48) und (49) mit $x_r - x_1 = (u_r + c_o M)t$ und unter Benutzung von (50.1) aus der Massenbilanz:

$$(51.1)\qquad u_r = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{c_o}{M} \quad \text{als Geschwindigkeit der rechten Grenze}$$

und aus der Impulsbilanz mit $\varkappa\, p_o = \varrho_o c_o^{\,2}$:

$$(51.2)\qquad \alpha = 2 - M^2 \ .$$

Beachten wir jetzt noch (50.2) und (50.3), so lassen sich die von der Mach-Zahl M abhängigen Lösungen für die Strömungs- und Schallgeschwindigkeit explizit angeben:

$$(52.1)\qquad u(x,t) = \frac{2}{\varkappa+1}\left(\frac{x}{t} + \frac{c_o}{M}\right) \qquad \text{Strömungsgeschwindigkeit}$$

$$(52.2)\qquad c(x,t) = \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\,\chi(M)\,\left(\frac{2}{\varkappa-1}\frac{c_o}{M} - \frac{x}{t}\right) \quad \text{Schallgeschwindigkeit}$$

mit

$$(53)\qquad \chi(M) = \sqrt{\frac{1+\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}(M^2-1)}{1+\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}(M^2-1)}} = \sqrt{\frac{\varkappa+1+2\varkappa(M^2-1)}{\varkappa+1+(\varkappa-1)(M^2-1)}} \ .$$

Die Lösungen von Burgers (17) und die von Wenk (/69/ Abschnitt 6.1), bei der die Konservierung des Gesamtimpulses gefordert wird, unterscheiden sich nun in der Art:

$$(54.1)\qquad \alpha = 1 : M = 1 \qquad \chi(M) = 1 \qquad \text{Burgers}$$

$$(54.2)\qquad \alpha = 0 : M = \sqrt{2} \qquad \chi(M) = \sqrt{\frac{3\varkappa+1}{2\varkappa}} \qquad \text{Wenk} \ .$$

Aus der Lösung (51) und (52) lassen sich noch einige allgemeine Beziehungen ableiten; so gilt für die Grenzen des Strömungsgebietes:

$$(55)\qquad x_1 = -c_o M t \qquad \text{und} \qquad x_r = u_r t = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{c_o}{M}\,t$$

und zu jedem Zeitpunkt t : $x_l = -\frac{\varkappa-1}{2} M^2 x_r$.

Für die Schallgeschwindigkeit c gilt mit der Ähnlichkeitsvariablen $z = \frac{x}{t}$ (vgl. (23.2) : $c = g^*(y)(u-z)$) :

(56) $$c = \chi(M)\,(u-z) .$$

Da die maximale Strömungsgeschwindigkeit u_{max} gerade da vorliegt, wo $c = 0$ ist, so gilt:

(57.1) $u_{max} = z = z_{max}$ und damit: $u_{max} = u_r = \frac{2}{\varkappa-1}\frac{c_o}{M}$.

Für den Nulldurchgang des Strömungsgeschwindigkeitsverlaufs findet man:

(57.2) $c(u = 0) = -z\,\chi(M) = \frac{c_o}{M}\chi(M)$.

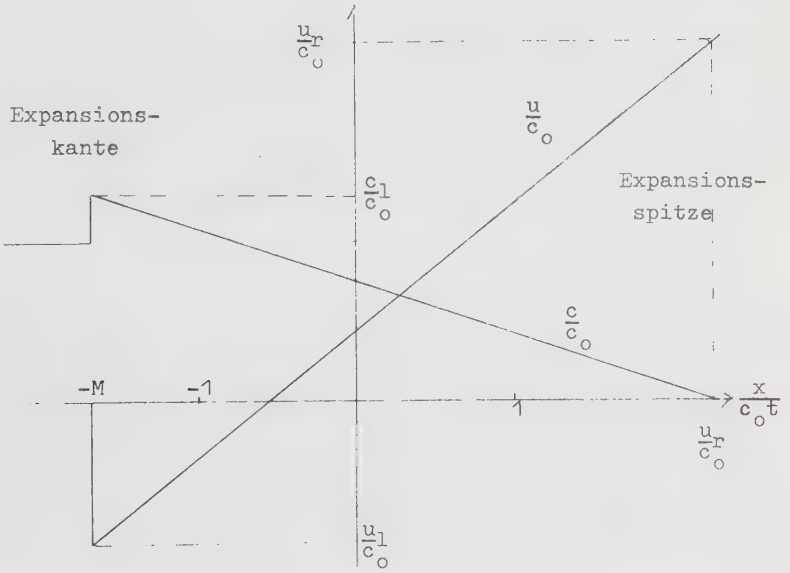


Abb. 5.3 $\sqrt{2}$ - Lösung bei erfüllten globalen Erhaltungssätzen

Wesentliches Merkmal der Wenkschen "$\sqrt{2}$ -Lösung" ist die schwache - ins ungestörte Gas zurücklaufende - Stoßwelle der Machzahl $M = \sqrt{2}$.

Für diese Lösung läßt sich auch die Schwerpunktlageveränderung der bewegten Masse berechnen (vgl. Abschnitt 4.2, Kellersche Lösung). Diese sei definiert durch:

$$(58.1) \qquad x_s(t) = \overline{x(t)} := \frac{\int_{x_l}^{x_r} x\varrho\,dx}{\int_{x_l}^{x_r} \varrho\,dx}$$

mit der bewegten Masse:

$$(58.2) \qquad \mathcal{M}(t) = \int_{x_l}^{x_r} \varrho(x,t)dx = \int_{x_l}^{x_r} \varrho(x,o)dx = -\varrho_o x_1(t) \ .$$

Über den Gesamtimpuls $\mathcal{U}(t) = \int_{x_l}^{x_r} \varrho u dx = (2-M^2)p_o t$ und die Lösung (52.1) $u(x,t) = \frac{2}{\varkappa+1}(\frac{c_o}{M} + \frac{x}{t})$ findet man sofort:

$$(58.3) \qquad x_s(t) = -\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}(2-M^2)\cdot\frac{(c_o t)^2}{x_1} - \frac{c_o t}{M}$$

und für die Schwerpunktlage der Anfangsverteilung:

$$(58.4) \qquad x_s^{(o)}(t) = \frac{\varrho_o}{\mathcal{M}} \int_{x_l}^{x_r} x dx = \frac{1}{2}\, x_1(t) \ .$$

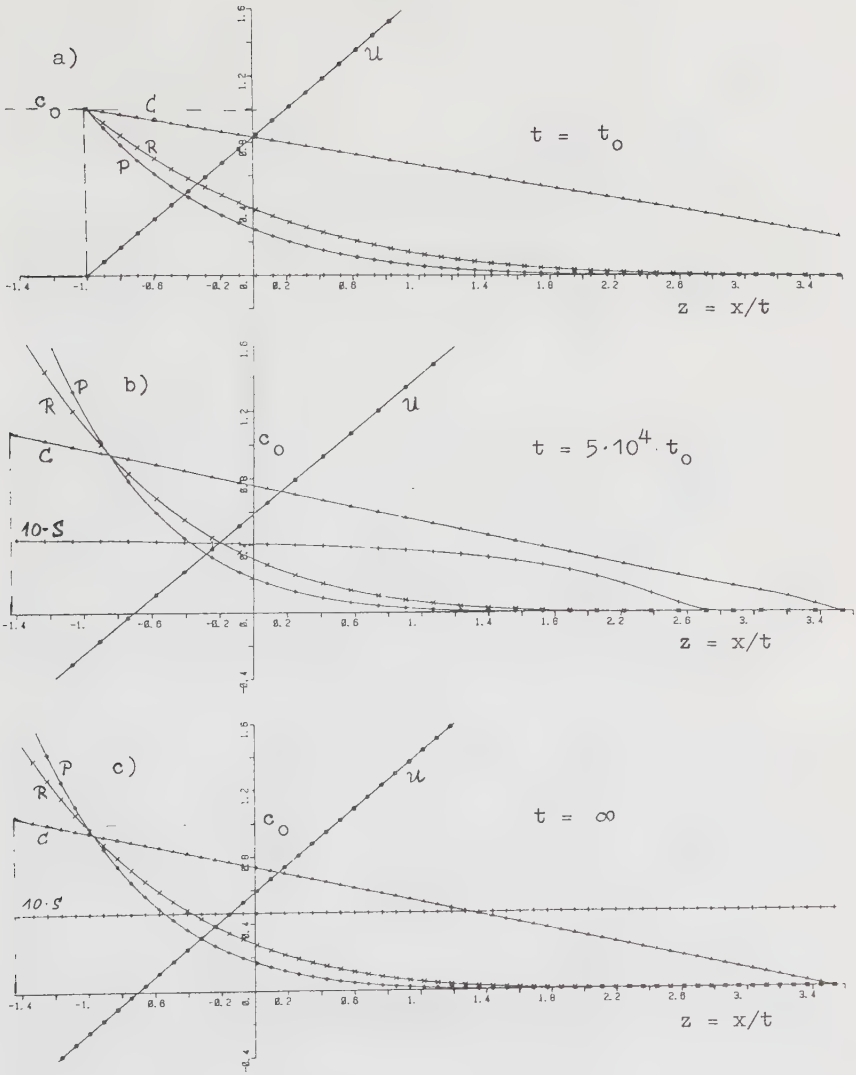
Mit $x_1(t) = -c_o Mt$ gilt dann für die Verschiebung der Schwerpunktlage:

$$(58.5) \quad \Delta x_s := x_s(t) - x_s^{(o)}(t) = \frac{c_o t}{2\varkappa M}(2-M^2) = -\frac{(a_o t)^2}{2x_1(t)}(2-M^2)$$

mittels der thermischen Geschwindigkeit a_o .

Da es sich bei dieser reinen Homologielösung um eine von der Zeit unabhängige Stoßfrontstärke M handelt, wird die Gesamtenthalpie der Gasmasse und somit auch die Enthalpie je Masseneinheit erhalten. Gesamtimpulserhaltung und Enthalpieerhaltung sind hierbei also äquivalent und konsistent, insbesondere auch im Sonderfall verschwindender Anströmung $u(x < x_1) = 0$ (vgl. Wenk /69/).

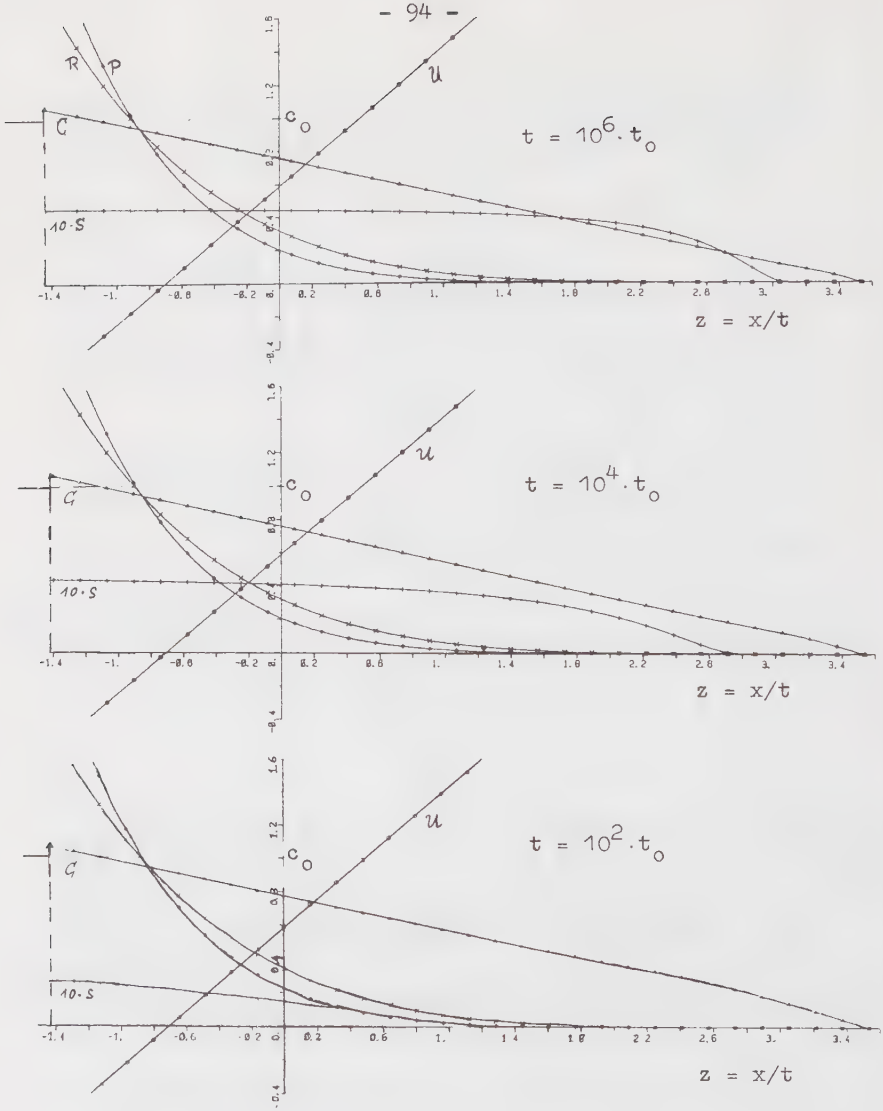
Im folgenden Abschnitt betrachten wir diese für isentrope Verhältnisse abgeleiteten Ergebnisse als stationäre asymptotische Ausgangsdaten.



o	GESCHWINDIGKEIT	U(Z, T)
▲	SCHALLGESCHWINDIGKEIT	C(Z, T)
+	ENTROPIEDICHTE	10.* S(Z, T)
×	MASSENDICHTE	R(Z, T)
◆	DRUCK	P(Z, T)

(Bez. vgl. Abb. 5.3)

Abb. 5.4' a: Homologie-Lösung von Burgers
Abb. 5.4' b: gasdynamisch berechnete Lösung
Abb. 5.4' c: Homologie-Lösung von Wenk



⊙ VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(Z,T)
▲ VERLAUF SCHALLGESCHWINDIGKEIT C(Z,T)
+ VERLAUF DER ENTROPIE 10.* S(Z,T)
× VERLAUF DER MASSENDICHTE R(Z,T)
◆ VERLAUF DES DRUCKES P(Z,T)

Abb. 5.4: zeitliche Entwicklung der gasdynamisch berechneten Lösung mit $M_o = 1$ und $M_\infty = \sqrt{2}$

5.7 Erweiterungen der Lösung auf allgemeinere Strömungsprobleme

Die in den Abschnitten 5.3 - 5.5 abgeleitete Lösung der anisentropen gasdynamischen Gleichungen läßt sich anwenden auf eine reine Expansionsströmung oder auch zur Beschreibung allgemeiner eindimensionaler, instationärer Gasbewegungen, hervorgerufen z.B. durch Kolbenbewegungen (vgl. Sirovich u. Chong /62/). Insbesondere können die Gleichungen (18) als allgemeines iteratives Lösungsverfahren verwendet werden, wenn man z.B. die Sonderlösung nach Abschnitt 5.4 als erste Näherung voraussetzt.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die von Wenk u. Larenz für isentrope Verhältnisse abgeleitete Homologielösung bei Erfüllung der globalen Erhaltungssätze. Als Ausgangsdaten (Normierung nach (3)) für die Expansion benutzen wir:

$$(59.1) \qquad \varrho_0 = 1. \qquad u_0 = 0. \qquad p_0 = 1. \,,$$

sowie als Machzahl-Parameter (vgl. Abschnitt 5.5):

$$(59.2) \qquad M_0 = 1. \qquad M_\infty = \sqrt{2}\,.$$

Die graphische Darstellung der Expansionslösung (vgl. Abb. 5.4) zeigt nun die zeitliche Entwicklung der Strömungsgrößen, ausgehend von einer Burgers'artigen Ähnlichkeitslösung ($M=M_0=1$) bis zum asymptotischen Fall der Wenk'schen Lösung ($M=M_\infty=\sqrt{2}$). Auffälligstes Merkmal dieser Entwicklung ist hierbei der Verlauf der Entropie.

Während bei dieser Betrachtung lediglich die Expansion eines Gases ins Vakuum behandelt wird, läßt sich dies ebenfalls auf den Fall des Überströmens eines Treibgases in ein Laufgas verallgemeinern, insbesondere, wenn man sich auf den asymptotischen Endzustand des Strömungsbildes konzentriert, was im folgenden geschehen soll. Die Beschränkung auf den asymptotischen Strömungsverlauf dürfte für die Laufgas-seitige Stoßwelle keine wesentliche Einschränkung bedeuten, da bereits die zeitabhängige Behandlung der reinen Expansion für die Expansionsspitze eine zeitunabhängige, also kon-

stante Strömungsgeschwindigkeit u_m lieferte.

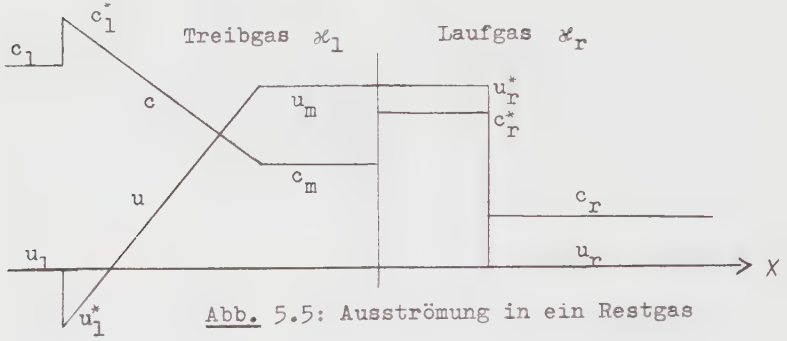


Abb. 5.5: Ausströmung in ein Restgas

Mit Hilfe der in $z = \frac{x}{t}$ linearen Ansätze für u und c läßt sich in Verallgemeinerung der Gleichung von Taub ($M_l = 1$) (vgl. Anhang 8.7 sowie Oertel /52/ Abschnitt C.2) für den Fall einer auch rückläufigen Stoßwelle M_l die Beziehung:

$$(60.1)\quad \frac{p_r}{p_l} \cdot \frac{\varkappa_l+1}{\varkappa_r+1} \cdot \frac{2\varkappa_r M_r^2 - \varkappa_r+1}{2\varkappa_l M_l^2 - \varkappa_l+1} = f(M_l, M_r)$$

mit

$$(60.2)\quad f(M_l, M_r) := \left\{ \frac{\varkappa_l+1}{(\varkappa_l-1)M_l^2+2} \left(1 - \frac{c_r}{c_l} \cdot \frac{\varkappa_l-1}{\varkappa_r+1} M_l \frac{M_r^2-1}{M_r}\right) \right\} \frac{2\varkappa_l}{\varkappa_l-1}$$

herleiten. Diese Gleichung ist im Taub'schen Fall ($M_l = 1$) bei vorgegebenen p_l, p_r und c_l, c_r sowie $\varkappa_l, \varkappa_r$ iterativ lösbar für die Machzahl M_r der nach rechts laufenden Stoßwelle (vgl. auch die Godunov-Iteration des Abschnitts 6.4). Graphische Darstellungen für verschiedene Fälle finden sich bei Oertel /52/, Abschnitt C.2.

Der Wert der Machzahl M_r ist beschränkt durch den Grenzfall der Expansion ins Vakuum $p_r/p_l \longrightarrow 0$:

$$(61)\quad M_{r,max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa_r+1}{\varkappa_l-1} \cdot \frac{c_l}{c_r} \cdot \frac{1}{M_l} + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\varkappa_r+1}{\varkappa_l-1} \cdot \frac{c_l}{c_r} \cdot \frac{1}{M_l}\right)^2 + 1}$$

mit $\quad M_{r,max} \approx \frac{\varkappa_r+1}{\varkappa_l-1} \cdot \frac{c_l}{c_r} \cdot \frac{1}{M_l} \qquad$ für $\quad c_r \ll c_l$.

Eine - für die Lösung der Gleichungen (60) notwendige - zweite Beziehung erhalten wir z.B. aus der globalen Impulsbilanz analog dem Fall der reinen Expansion des Abschnitts 5.6:

$$(62.1)\quad \frac{(\varkappa_l+1)(2-M_l^2)}{(\varkappa_l-1)M_l^2+2} + \frac{p_r}{p_l}\,\frac{\varkappa_l+1}{\varkappa_r+1}\,\frac{2\varkappa_r(M_r^2-1)}{(\varkappa_l-1)M_l^2+2} = f(M_l,M_r)\ ,$$

woraus durch einfachen Vergleich mit (60.1) folgt:

$$(62.2)\quad \frac{2\varkappa_r M_r^2 - \varkappa_r+1}{2\varkappa_l M_l^2 - \varkappa_l+1} = \frac{2\varkappa_r(M_r^2-1)}{(\varkappa_l-1)M_l^2+2} + \frac{p_l}{p_r}\,\frac{(\varkappa_r+1)(2-M_l^2)}{(\varkappa_l-1)M_l^2+2}\ .$$

Diese Gleichung ist linear in M_r^2 und quadratisch in M_l^2. Setzen wir also die Beziehung für M_l in (60) ein, so ist diese verallgemeinerte Taub-Gleichung ebenfalls iterativ nach M_r auflösbar. Eine Entwicklung für $p_r \ll p_l$ der in M_l^2 quadratischen Gleichung (62.2) ergibt:

$$(63)\quad M_l^2 = 2 + \frac{2\varkappa_l}{3\varkappa_l+1}\left\{\frac{\varkappa_r}{\varkappa_l}\,\frac{\varkappa_l+1}{\varkappa_r+1}\,(M_r^2-1)+1\right\}\frac{p_r}{p_l}\ .$$

Analog zur Taub'schen Lösung lassen sich Näherungsformeln für spezielle Ausgangsdaten herleiten, und es gelten die von Oertel /52/ C.2 behandelten Beispiele und graphischen Darstellungen entsprechend, wenn man die Änderung aufgrund der Berücksichtigung der globalen Erhaltungssätze beachtet (vgl. Abb. 5.6-5.7).

Ein Spezialfall mit $\varkappa_l = \varkappa_r = \varkappa$ und $c_l = c_r$ ergibt sich zu:

$$(64)\quad M_r = M_l = \sqrt{2} \qquad \text{für} \qquad p_l = p_r \varkappa^{\frac{2\varkappa}{\varkappa-1}}\ .$$

Die relativen Abweichungen der hier berechneten Werte von denen aufgrund der Taub-Gleichung betragen rund 25 % (vgl. Abb. 5.6-5.7) und stimmen recht gut mit experimentellen Messungen überein (vgl. Greene/Tönnies /21/).

In den folgenden Abbildungen 5.6-5.9 sind die Kurvenverläufe der hier berechneten Mach-Zahlen M_r und M_l dargestellt für verschiedene Parameter. Ein vergleich zeigt die Abweichungen der Mach-Zahl M_r von den Werten M_T nach Taub mit deutlich niedrigeren Machzahlen (vgl. /21/, /52/).

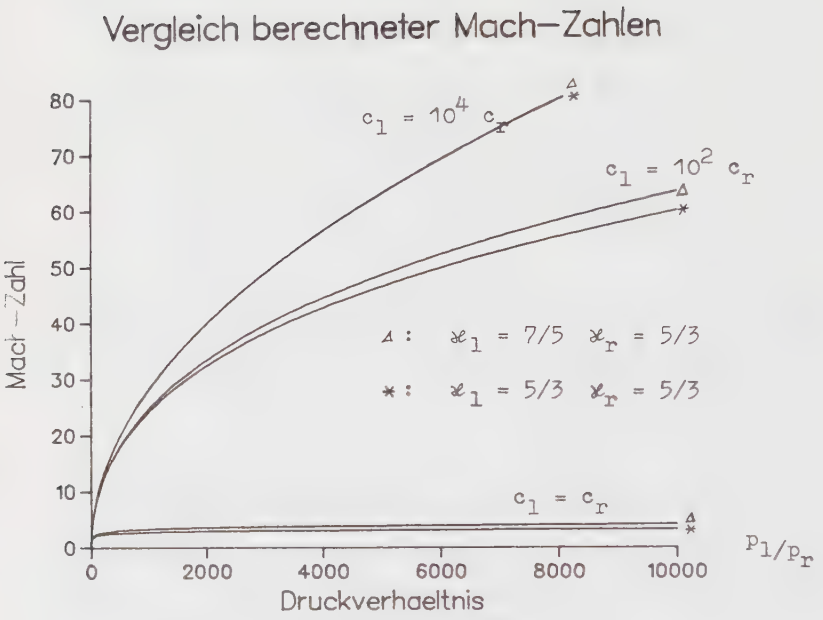


Abb. 5.6: Darstellung der Mach-Zahl M_r

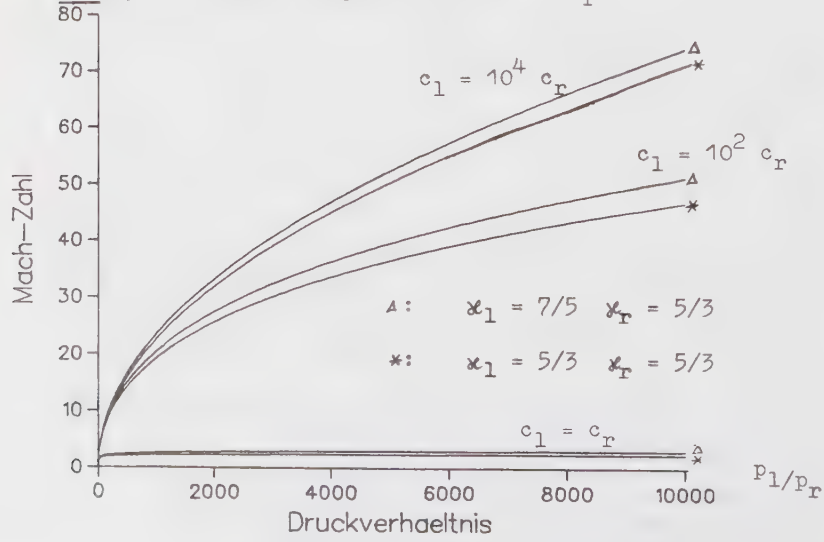


Abb. 5.7: Darstellung der Mach-Zahl M_T (Taub)

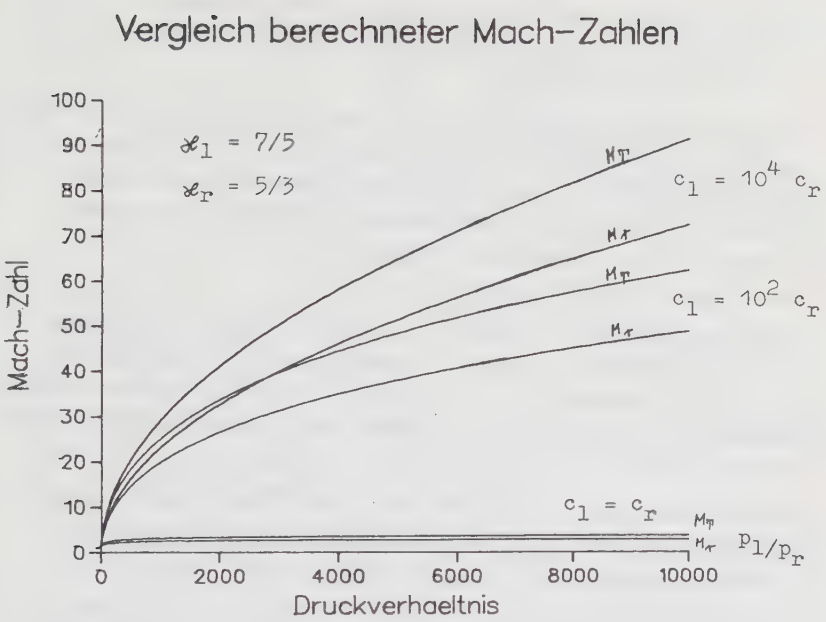


Abb. 5.8: Vergleich der Mach-Zahlen M_r und M_T

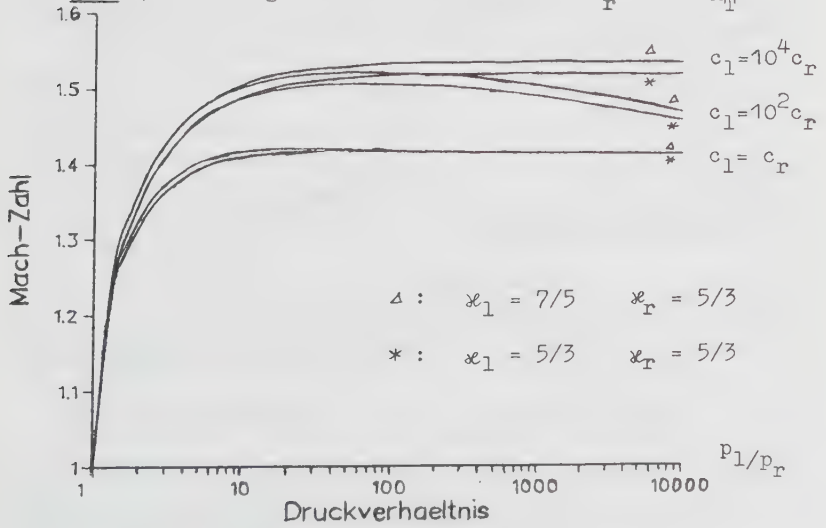


Abb. 5.9: Darstellung der Mach-Zahl M_l

6. Numerische Methoden zur Lösung nichtlinearer hyperbolischer Systeme

In Verallgemeinerung der Charakteristikenmethode von Riemann zur Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen (vgl. Kapitel 2) sind in den letzten Jahren eine Vielzahl verschiedener numerischer Lösungsverfahren in der Literatur erschienen (vgl. Richtmyer & Morton /57/, Book /4/, Holt /27/, Peyret & Taylor /55/, Sod /64/).

Ausgangspunkt dieser Entwicklung waren wohl die grundlegenden Arbeiten von Lax /37/, der, ausgehend vom Begriff der schwachen Lösungen (vgl. Abschnitt 2.1), eine mathematische Theorie der Stoßwellen entwickelte (vgl. auch Smoller /63/, Morawetz /47/).

Das mathematische Problem besteht darin, ein System nichtlinearer hyperbolischer Gleichungen in konservativer Form zu einem vorgegebenen Anfangswertproblem zu lösen:

$$(1) \qquad \underline{U}_t + \underline{F}(\underline{U})_x = 0 \quad \text{mit} \quad \underline{U}(x,0) = \underline{U}^{(0)}(x) \; .$$

Hierin bedeutet $\underline{F}$ eine glatte, d.h. stetig differenzierbare, Vektorfunktion, die nur von $\underline{U}$ selbst abhängt und deren Ableitungsmatrix $\underline{\underline{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial \underline{U}} \underline{F}\right)^T$ reelle und verschiedene Eigenwerte a^j besitzt. Im Kontext der Gasdynamik gehören zu diesen Eigenwerten und den entsprechenden Eigenfunktionen einzelne Moden, die Unstetigkeiten, wie Stoßwellen und Kontaktunstetigkeiten, aufweisen können (vgl. Kapitel 3).

Das System der hyperbolischen idealen gasdynamischen Gleichungen 2(8):

$$(2.1) \quad \varrho_t + (\varrho u)_x = 0 \qquad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$(2.2) \quad (\varrho u)_t + (p + \varrho u^2)_x = 0 \qquad \text{Bewegungsgleichung}$$

$$(2.3) \quad e_t + (hu)_x = 0 \qquad \text{Energiegleichung}$$

mit Massendichte ϱ, Strömungsgeschwindigkeit u, Impulsdichte $j = \varrho u$, Druck p, (Gesamt-)Energiedichte $e = \frac{p}{\varkappa - 1} + \frac{\varrho}{2} u^2$ und (Gesamt-)Enthalpiedichte $h = e + p$

ist von der Form (1).

Hierin gilt das Polytropengesetz:

$$(3) \qquad p = A(s)\, \varrho^{\varkappa} \qquad \text{mit} \qquad \varkappa = \frac{c_p}{c_v}$$

und der Entropiedichte s (vgl. Abschnitt 1.1).

Rechnet man zu diesem System (2) die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ aus, so findet man die Eigenwerte (vgl. Abschnitt 2.3):

$$(4) \qquad a^{1;2} = u \pm c \qquad \text{und} \qquad a^{3} = u$$

mit der lokalen Schallgeschwindigkeit c, die sich nach (3) berechnet zu:

$$(5) \qquad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_s = \varkappa \frac{p}{\varrho} \,.$$

Wie in Abschnitt 2.2 dargestellt, erfüllt das System (2) gerade die Rankine-Hugoniot-Bedingungen für Stoßwellen:

$$(6) \qquad W\left[\underline{U}\right] = \left[\underline{F}\right] \,.$$

Die Variablen werden in dimensionslosen Einheiten betrachtet derart, daß ϱ und p auf ihre Ruhegrößen und u auf die thermische Geschwindigkeit a_o bezogen werden, ferner wird die Ortsvariable x durch eine charakteristische Länge L und t durch die zugehörige Zeit $\frac{L}{a_o}$ dimensioniert.

$$(7) \qquad \begin{array}{lll} x \longrightarrow \frac{x}{L} & t \longrightarrow \frac{a_o}{L}\, t & a_o^{\,2} = \frac{p_o}{\varrho_o} = RT_o \\ \varrho \longrightarrow \frac{\varrho}{\varrho_o} & p \longrightarrow \frac{p}{p_o} & u \longrightarrow \frac{u}{a_o} \,. \end{array}$$

Durch diese Normierung behalten die Gleichungen (3) ihre Form unverändert.

6.1 Grundlagen der numerischen Verfahren und spezielle Bezeichnungen

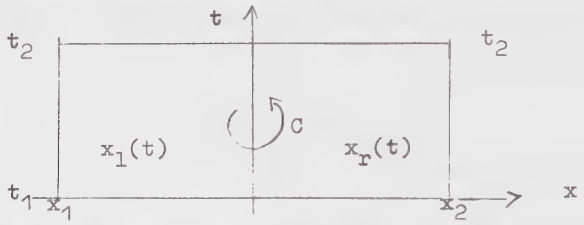
Für numerische Zwecke bei der Betrachtung schwacher Lösungen ist es sinnvoll, die zu den Differentialgleichungen gehörigen Integralgleichungen zu behandeln. Dies geschieht dadurch, daß man die einzelnen konservativen Gleichungen (1) $U_t + F_x = 0$ als Integrabilitätsbedingung $(\phi_x)_t = (\phi_t)_x$ mit:

$$(8.1) \qquad U = \phi_x \qquad \text{und} \qquad F = -\phi_t$$

zu einer vollständigen Differentialform $d\phi = \phi_x dx + \phi_t dt$ auffaßt, für die dann gilt:

$$(8.2) \qquad \oint_C d\phi = \oint_C (U dx - F dt) = 0$$

für jede geschlossene Kurve C in der oberen Halbebene (x,t).



Dies bedeutet dann insbesondere, wenn man für die Kurve C z.B. ein Rechteck wählt:

$$(9) \qquad \int_{x_1}^{x_2} U(x,t_2)dx = \int_{x_1}^{x_2} U(x,t_1)dx + \int_{t_1}^{t_2} \{F(x_2,t)-F(x_1,t)\}dt \ .$$

Die Berechnung schwacher Lösungen über Integralgleichungen (vgl. 2.(3)) und die zugehörigen numerischen Verfahren der Finiten Elemente (vgl. Chow /16, Chung /17/, Peyret & Taylor /55/, Marsal /42/) ist in den letzten Jahren erfolgreich bei der Betrachtung parabolischer Differentialgleichungen, wie der Wärmeleitungs- und der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung, angewendet worden. Bei hyperbolischen Gleichungen liefern jedoch die Methoden der Finiten Differenzen, die sich auf die Differentialgleichungen selbst beziehen, "bessere" Ergebnisse (vgl. Morton /48/, 1982).

Dies liegt sicherlich größtenteils darin begründet, daß die Integralmethoden prinzipiell mitteln, dies aber bei hyperbolischen Gleichungen, bei denen (vgl. die Stoß- und Kontaktunstetigkeiten bei den gasdynamischen Gleichungen) scharfe Kanten auftreten können, unerwünscht ist.

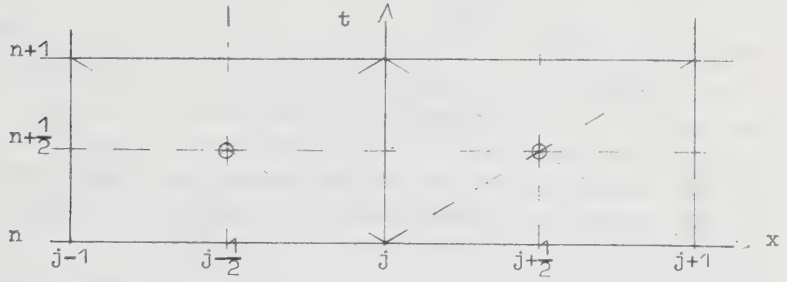
Bei den Methoden der Finiten Differenzen, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen, legt man über die x,t-Halbebene ($t \geq 0$) ein diskretes Rechteck-Gitter mit den diskreten Orten x_j und Zeiten t_n, sowie den Inkrementen Δx und Δt :

(10.1) $x_j = j\Delta x \quad j=0,\ldots,J$ und $t_n = n\Delta t$ mit $n=0,\ldots,N$;

Die Lösungen U und die Fluß-Funktionen F an diesen Stellen (x_j, t_n) werden durch entsprechende Indizes gekennzeichnet:

(10.2) $$U_j^n := U(x_j, t_n) \qquad F_j^n := F(U_j^n) = F(x_j, t_n) \ .$$

Häufig werden auch Zwischenwerte betrachtet, die dann durch entsprechende halbzahlige Indizes bezeichnet werden.



Die Gittereinteilung selbst kann nun nicht willkürlich sein, vielmehr muß aufgrund der Charakteristikenscharen $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (vgl. Courant & Friedrichs /18/):

(11) $$\max_j(|u_j| + c_j)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

erfüllt sein. Hierdurch ist gewährleistet, daß die Strömung, deren Werte jeweils in der Umgebung der Gitterpunkte als konstant angenommen werden sollen, beim Integrationsschritt innerhalb des Gebietes bleibt.

Verwendet werden im folgenden die numerischen Operatoren (vgl. Anhang 8.4) der arithmetischen Mittelung und Differenzbildung:

(12.1) $$mU_{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(U_{j+1} + U_j) \ , \quad dU_{j+\frac{1}{2}} := U_{j+1} - U_j \ ,$$

die Ableitungsoperatoren 1. Grades ("Vorwärts"- bzw. "Rückwärtsableitung", 1. Ordnung):

(12.2) $$D_+U_j := \frac{1}{\Delta x}(U_{j+1} - U_j) \ , \quad D_-U_j := \frac{1}{\Delta x}(U_j - U_{j-1})$$

und die Zentrierte Ableitung (2. Ordnung):

(12.3) $$D_oU_j := \frac{1}{2\Delta x}(U_{j+1} - U_{j-1}) \ .$$

6.2 Standard-Differenzen-Verfahren

Die einfachste Möglichkeit, ein Erhaltungsgesetz in konservativer Form $U_t + F_x = 0$ mit $F = F(U)$ numerisch durch finite Differenzen zu approximieren, ist sicherlich dadurch gegeben, daß man die zeitliche und räumliche Ableitung jeweils durch einen Differenzenoperator nach (12) ersetzt, z.B.:

$$(13) \quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{F_{j+1}^n - F_j^n\right\} = U_j^n - \Delta t \cdot D_+ F_j^n \ ,$$

was einer einfachen Integration in Gleichung (9) entspricht.

Dieses sogenannte 1-Schritt-Verfahren ist von 1. Ordnung und entspricht daher analytisch einer linearen Näherung. Will man nun die Genauigkeit des Verfahrens erhöhen, so bieten sich einerseits die Approximation durch Differenzenoperatoren höherer Ordnung (vgl. Anhang 8.4) und andererseits Iterations- und Mehr-Schritt-Verfahren an.

Die Differenzenoperatoren höherer Ordnung haben den Nachteil, zur Berechnung eines neuen Gitterpunktes bei j nicht nur die unmittelbar benachbarten Punkte bei $j+1$ und $j-1$ zu verwenden, sondern auch weiter außen liegende, was zu unerwünschten Mittelungen bzw. Glättungen der Lösungen führt. Andererseits zeigen sich bei den Iterationsverfahren häufig Oszillationen in den Lösungen (vgl. die Abbildungen 6.1 und 6.2).

Als geeignet zur Behandlung von Strömungsproblemen mit Unstetigkeitsstellen haben sich daher sogenannte 2-Schritt-Verfahren erwiesen, deren bekannteste die Methoden von Lax-Wendroff, Godunov und von MacCormack sind (vgl. Richtmyer & Morton /57/, Holt /27/, Peyret & Taylor /55/).

Bei der Herleitung des klassischen Lax-Wendroff-Verfahrens entwickelt man die Lösung $U(x,t)$ in eine Taylor-Reihe bzgl. t bis zur 2. Ordnung:

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t U_t^n + \frac{(\Delta t)^2}{2} U_{tt}^n \ ,$$

beachtet: $U_t = -F_x$ sowie $U_{tt} = -F_{xt} = -F_{tx}$

und erhält: $U^{n+1} = U^n - \Delta t F_x^n - \frac{(\Delta t)^2}{2} F_{xt}^n \ .$

F_x und F_t approximiert man nun durch Differenzen:

$$F_x^n = \frac{1}{\Delta x}\left\{F_{j+\frac{1}{2}}^n - F_{j-\frac{1}{2}}^n\right\}$$ räumlich zentrierte Ableitung

$$F_t^n = \frac{2}{\Delta t}\left\{F_j^{n+\frac{1}{2}} - F_j^n\right\}$$ zeitliche "Vorwärts-Ableitung"

und erhält damit ein Differenzen-Verfahren, welches räumlich und zeitlich von 2. Ordnung ist:

$$(14.1)\quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta x}{\Delta t}\left\{F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right\} \equiv U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF_j^{n+\frac{1}{2}} .$$

Hierin werden die Zwischenwerte $F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = F(U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$ nach Richtmyer in einem ersten Rechenschritt ermittelt:

$$(14.2)\qquad U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = mU_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\, dF_{j+\frac{1}{2}}^n .$$

Als allgemeines 2-Schritt-Verfahren 2. Ordnung mag die Methode von Lerat & Peyret (vgl. /55/) gelten:

$$(15.1)\quad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2b\Delta x}\left\{(b-a)F_j^n + (2a-1)F_j^n + (1-a-b)F_{j-1}^n + dF_{j+a-\frac{1}{2}}^{n+b}\right\}$$

$$(15.2)\quad U_{j+a}^{n+b} = aU_{j+1}^n + (1-a)U_j^n - b\frac{\Delta t}{\Delta x} dF_{j+\frac{1}{2}}^n$$

für beliebige reelle Zahlen a , b .

Spezialfälle dazu sind: das Verfahren von Lax-Wendroff mit $a = b = 0.5$, das von Rubin-Burstein mit $a = 0.5$ und $b = 1$ sowie das von MacCormack mit $a = 0$ und $b = 1$.

Ergebnisse von höherer Ordnung liefert z.B. ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren von Hyman (vgl. /64/), bei dem die räumlichen Ableitungen durch die Standard-Ableitung 4. Ordnung (vgl. Anhang 8.4):

$$(16.1)\quad QF_j^n := \frac{4}{3}\,\frac{F_{j+1}^n - F_{j-1}^n}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\,\frac{F_{j+2}^n - F_{j-2}^n}{4\Delta x}$$

approximiert werden, während für die Zeitableitung ein Iterations-Schema benutzt wird, welches einen expliziten Prädiktor 1. Ordnung:

$$(16.2)\qquad \overline{U_j^{n+1}} = U_j^n - \Delta t\, QF_j^n$$

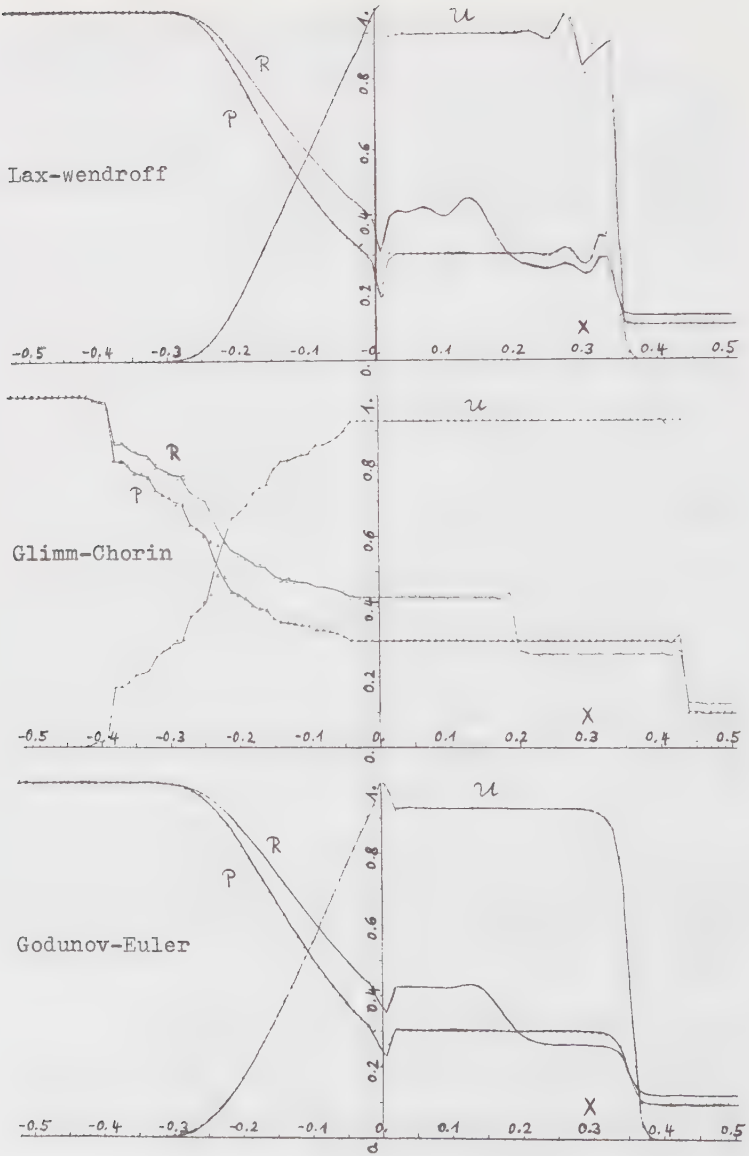


Abb. 6.1 : unkorrigierte Lösungsverfahren

mit einem Korrektor 2. Ordnung ("Trapezregel") verbindet:

$$(16.3) \qquad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{2}\left\{ QF_j^n + \overline{QF_j^{n+1}} \right\} .$$

Dieses und ähnliche Iterationsverfahren sind bei glatten Lösungen anwendbar, zeigen aber bei Stoßwellenverhalten Oszillationen, die sich mit der Anzahl der Iterationsschritte nur noch weiter ausprägen.

6.3 Korrekturverfahren zur Berücksichtigung von Unstetigkeiten

Betrachten wir zuerst die allgemeine 3-Punkt-Approximation U^* einer Lösung U_j^{n+1} - zur Zeit $t = (n+1)\,\Delta t$ an der Stelle $x = x_j$ - durch die Nachbarpunkte zur Zeit $t = n\Delta t$:

$$(17.1) \qquad U_j^* = a_j U_{j-1}^n + b_j U_j^n + c_j U_{j+1}^n .$$

Bei Vorliegen eines Erhaltungsgesetzes gilt:

$$(17.2) \qquad \sum_{j=1}^{N} U_j^* = \sum_{j=0}^{N-1} a_{j+1} U_j^n + \sum_{j=1}^{N} b_j U_j^n + \sum_{j=2}^{N+1} c_{j-1} U_j^n = \sum_{j=1}^{N} U_j^n .$$

Durch Koeffizientenvergleich findet man:

$$(17.3) \qquad a_{j+1} + b_j + c_{j-1} = 1 \quad \text{für} \quad j = 2,\ldots,N-1$$

mit: $a_1 = 0$, $a_2 + b_1 = 1$, $b_N + c_{N-1} = 1$, $c_N = 0$.

Damit sind wegen $b_j = 1 - a_{j+1} - c_{j-1}$ nur noch zwei Koeffizienten frei, und bei Umbenennung:

$$(17.4) \qquad a_j = \nu_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\beta_{j-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad c_j = \nu_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\beta_{j+\frac{1}{2}}$$

erhält man die allgemeine Darstellung mit den Operatoren m und d nach (12):

$$(17.5) \qquad U_j^* = U_j^n - d\left[\beta_j m U_j^n\right] + d\left[\nu_j d U_j^n\right] .$$

Während hier $d\left[\beta_j m U_j^n\right]$ - z.B. bei der Kontinuitätsgleichung mit $\beta_j = \frac{\Delta t}{\Delta x} mu_j$ - die Fluß-Änderung dF_j^n darstellt, erkennt man an dieser Darstellung, daß hier ein

freier Diffusionsterm (2. Ableitung mit dem räumlich variierenden Diffusionskoeffizienten ν_j) auftritt. Dies bedeutet, daß die Erhaltungssätze bei den numerischen Approximationen 1. Ordnung invariant gegen zusätzliche Diffusionsterme sind ($U_t+(F-\nu V_x)_x = 0$) .

Aus Gründen der numerischen Stabilität der Verfahren und zwecks Vermeidung überschießender Spitzen in den Lösungen (vgl. Abb. 6.2) fügt man daher zu bestehenden Verfahren einen zusätzlichen Diffusionsterm, der physikalisch eine Dämpfung beschreibt, hinzu. Diesen Term bezeichnet man in der Literatur als "Artificial Viscosity", und man erhält beispielsweise das Verfahren von Rusanov (vgl. /64/):

$$(18.1) \qquad U_j^{n+1} = U_j^n - \Delta t D_o F_j^n + d(\nu_j dU_j^n)$$

mit den künstlichen Diffusionskoeffizienten ν_j , beruhend auf der Bedingung (11):

$$(18.2) \qquad \nu_j = \omega \frac{\Delta t}{\Delta x} m(u_j^n + c_j^n)$$

Genauere Verfahren gehen so vor, daß sie diesen Schritt der "Diffusion" durch einen weiteren Schritt der "Antidiffusion":

$$(19) \qquad U_j^{n+1} = \overline{U_j^{n+1}} - d(\vartheta_j d\overline{U_j^{n+1}})$$

- mit den Antidiffusionskoeffizienten ϑ_j - zu korrigieren suchen.

Bei der Antidiffusionsmethode von Boris, Book, Hain /4/ wird dieser letzte Schritt ersetzt durch den sogenannten Flux-Corrected-Transport (FCT):

$$(20.1) \qquad U_j^{n+1} = \overline{U_j^{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} dG_j$$

mit:

$$(20.2) \qquad G_{j+\frac{1}{2}} := S_{j+\frac{1}{2}} \max\left\{0., \min\left[S_{j+\frac{1}{2}}\phi_{j-\frac{1}{2}}, |\phi_{j+\frac{1}{2}}|, S_{j+\frac{1}{2}}\phi_{j+\frac{3}{2}}\right]\right\}$$

mit: $\phi_{j+\frac{1}{2}} = d\overline{U_j^{n+1}}$ und $S_{j+\frac{1}{2}} = \operatorname{sgn}\left\{\nu_{j+\frac{1}{2}} dU^*_{j+\frac{1}{2}}\right\}$.

Ein anderes - aber in der numerischen Wirkung ähnliches - Verfahren ist Harten's Methode der Artificial Compression

(abgekürzt: ACM), die ebenfalls als Korrektur auf ein schon existierendes Verfahren $U_j^* = LU_j^n$ angewendet wird. Festgestellt wird hierbei, ob die Lösung sich im glatten Gebiet oder an einer Unstetigkeitsstelle $\{U_l(t), U_r(t), W(t)\}$ (vgl. Abschnitt 2.2) befindet:

$$U_j^{n+1} = U_j^* - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dG_j \tag{21.1}$$

mit:

$$G_{j+\frac{1}{2}} = S_{j+\frac{1}{2}} \max\left\{0., \min\left[S_{j+\frac{1}{2}} dU^*_{j-\frac{1}{2}},\ dU^*_{j+\frac{1}{2}},\ S_{j+\frac{1}{2}} dU^*_{j+\frac{3}{2}}\right]\right\} \tag{21.2}$$

und der Bezeichnung: $S_{j+\frac{1}{2}} = \mathrm{sgn}(dU^*_{j+\frac{1}{2}})$

Diese Korrekturschemen benutzen im Prinzip ein Monotoniekriterium der Art:

$$\min(U_{j-1}^n, U_j^n) \leq U_j^{n+1} \leq \max(U_{j-1}^n, U_j^n) \tag{22}$$

insofern, als bei Verletzung dieser Bedingung U_j^{n+1} in $\overline{U_j^{n+1}}$ geändert werden kann durch:

$$\overline{U_j^{n+1}} = U_j^{n+1} - A_j \tag{23.1}$$

mit:

$$A_j = S_j \max\left\{0., \min\left[(U_j^{n+1} - U_{j-1}^n)\cdot S_j, \left|U_j^{n+1} - U_j^n\right|\right]\right\}, \tag{23.2}$$

worin $S_j = \mathrm{sgn}(U_j^{n+1} - U_j^n)$ bedeutet.

Bei der Untersuchung der einzelnen Verfahren stellen wir fest, daß zwar der gewünschte Effekt der Verhinderung überschießender Spitzen erreicht wird, aber es treten doch noch leichte Oszillationen auf, wobei auch die Erhaltung der Flüsse gestört wird.

Letzteres wiederum läßt sich verhindern, wenn man einzelne Verfahren in geeigneter Weise miteinander kombiniert, so daß für glatte Gebiete ein Verfahren höherer Ordnung ($k > 1$) angewendet wird und für die Umgebung von Unstetigkeitsstellen ein Verfahren 1. Ordnung. Dies leistet eine "Hybrid-Methode" von Harten & Zwas für zwei bereits existierende Verfahren:

$$U_j^{n+1} = L^1 U_j^n = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF_j^{(1)} \tag{24.1}$$

(24.2) $$U_j^{n+1} = L^k U_j^n = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF_j^{(k)} \quad ,$$

wenn man einen Hybrid-Operator definiert von der Art:

(24.3) $$LU_j^n = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF_j^H$$

mit den Flußgrößen F_j^H als Konvexkombination der beiden Verfahren:

(24.4) $$F^H_{j+\frac{1}{2}} = \vartheta_{j+\frac{1}{2}} F^{(1)}_{j+\frac{1}{2}} + (1-\vartheta_{j+\frac{1}{2}})\, F^{(k)}_{j+\frac{1}{2}} \quad ,$$

worin der Schalter ϑ mit $0 \leq \vartheta_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$ z.B. so aussehen kann:

(24.5) $$\vartheta_j^* = \begin{cases} \left| \dfrac{|dg_{j+\frac{1}{2}}| - |dg_{j-\frac{1}{2}}|}{|dg_{j+\frac{1}{2}}| + |dg_{j-\frac{1}{2}}|} \right|^{\alpha} & \text{für } |dg_{j+\frac{1}{2}}| + |dg_{j-\frac{1}{2}}| < \sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\vartheta_{j+\frac{1}{2}} = \max(\vartheta_j^*, \vartheta_{j+1}^*)$,

worin $\sigma > 0$ und $\alpha \geq 1$ Maßzahlen für vernachlässigbare Variationen sind. Für $\vartheta = 0$ wird somit die Lösung nach dem Verfahren L^k berechnet und nach L^1 für $\vartheta = 1$, was z.B. der Fall ist, wenn an der Stelle j eine Sprungstelle vorliegt ($dg_{j+\frac{1}{2}} = 0$, $dg_{j-\frac{1}{2}} \neq 0$ oder umgekehrt).

Der Einbau eines solchen Schalters ϑ ist natürlich auch bei den übrigen Korrekturverfahren nützlich.

6.4 Die Godunov-Iteration und die Random-Choice-Lösung

Eine interessante Methode, die die Erhaltungsgleichungen erfüllt, keine Oszillationen und kein Überschießen zeigt, ist ein Verfahren, bei dem die Zwischenwerte des 2-Schritt-Verfahrens von Lax-Wendroff:

(25) $$F^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} = F(U^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}})$$

mittels der Godunov-Iteration (vgl. Holt /27/) über die Rankine-Hugoniot-Bedingungen berechnet werden. Das Verfahren selbst (Finite-Volumen- oder Zellen-Methode) beruht auf der Integralform (9) der hyperbolischen Gleichungen.

Zur Herleitung der Godunov-Iteration definiert man die Größen:

$$(26.1) \qquad B_r = \frac{p_r - p_*}{u_r - u_*} \qquad\qquad B_l = \frac{p_l - p_*}{u_l - u_*}$$

mit: $p_l = p_j^n \qquad u_l = u_j^n \qquad \varrho_l = \varrho_j^n \qquad p_* = p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$

$p_r = p_{j+1}^n \qquad u_r = u_{j+1}^n \qquad \varrho_r = \varrho_{j+1}^n \qquad u_* = u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$

und kann dann zeigen, daß B_r und B_l Funktionen von p_* allein sind.

Nehmen wir mit speziellem Bezug auf ein vorliegendes Strömungsproblem zuerst an, die rechte Welle sei eine Stoßwelle, dann gilt mit $p_* > p_r$ nach 2(10):

$$(26.2) \qquad B_r = \sqrt{\varkappa\, p_r \varrho_r}\, \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\frac{p_*}{p_r} + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\,.$$

Ist die rechte Welle keine Stoßwelle, so handelt es sich um eine Expansionswelle, die bei angenommener Isentropie zur Riemann-Invariante $u - \frac{2}{\varkappa-1} c = u_r - \frac{2}{\varkappa-1} c_r$ gehört. Hierin ersetzt man $c = c(p)$, benutzt die Definition (26.1) und findet:

$$(26.3) \qquad B_r = \sqrt{\varkappa p_r \varrho_r}\, \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\, \frac{1 - \frac{p}{p_r}}{1 - \left(\frac{p}{p_r}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}}$$

oder zusammengefaßt:

$$(26.4) \qquad B_r = \sqrt{\varkappa p_r \varrho_r}\; M^*\left(\frac{p_*}{p_r}\right) = B_r(p_*)$$

mit der erweiterten Mach-Zahl M^* (vgl. Abschnitt 2.2):

$$(26.5) \qquad M^*(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}\, x + \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} & \text{für} \quad x \geq 1 \\ \frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\, \frac{1-x}{1-x^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}} & \text{für} \quad x < 1\,. \end{cases}$$

Analoge Überlegungen liefern B_l :

$$(26.6) \qquad B_l = \sqrt{\varkappa p_l \varrho_l}\; M^*\left(\frac{p_*}{p_l}\right).$$

Betrachten wir nun die Definitionen (26.1) und lösen diese nach u_* auf, so gilt $u_* = u_*(B_r)$ und $u_* = u_*(B_l)$. Aufgrund der Stetigkeit von u im Bereich der Kontaktzone können wir diese Ausdrücke einander gleichsetzen und finden:

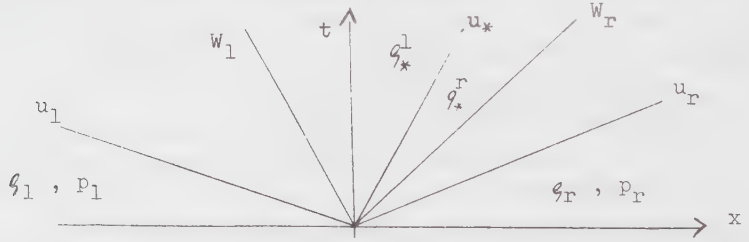
$$(27.1) \qquad p_* = \frac{B_l B_r (u_l - u_r) + B_l p_r + B_r p_l}{B_l + B_r} ;$$

gleiches gilt für u_*, wenn wir in (26.1) p_* ersetzen:

$$(27.2) \qquad u_* = \frac{B_l u_l + B_r u_r + p_l - p_r}{B_l + B_r} .$$

Zur Berechnung dieser Größen benutzt man ein Iterationsverfahren mit dem Startwert $p_*^{(o)} = \frac{1}{2}(p_r + p_l)$, setzt dieses in (26.4) und (26.6) ein und bestimmt daraus wiederum $p_*^{(1)}$ über (27.1). Mit dem Ergebnis wird dann u_* mittels (27.2) berechnet.

Die Berechnung der übrigen Strömungsgrößen erfolgt über die Darstellung der Charakteristiken:



Hierbei gilt:

$$(28.1) \qquad W_l = u_l - \frac{B_l}{\varrho_l} \qquad\qquad W_r = u_r + \frac{B_r}{\varrho_r} ,$$

und für die Dichte-Werte rechts und links der Mediengrenze, definiert durch u_*, gilt nach 2(9):

$$(28.2) \qquad \varrho_*^l = \frac{B_l}{u_* - W_l} \qquad\qquad \varrho_*^r = \frac{B_r}{W_r - u_*} .$$

Die Entscheidung darüber, welche Zwischenwerte für

$$(29.1) \qquad \varrho = \varrho_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} , \quad p = p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad u = u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

letztlich gewählt werden, trifft man über das Schema:

1.) $W_l \geqq 0$, $W_r \geqq 0$: $\varrho = \varrho_l$ $u = u_l$ $p = p_l$
2.) $W_l \leqq 0$, $W_r \leqq 0$: $\varrho = \varrho_r$ $u = u_r$ $p = p_r$

oder, falls die charakteristischen Kurven W_l und W_r in verschiedenen Quadranten liegen,

3.) $W_l \leqq 0$, $W_r \geqq 0$:
a) $u_* \geqq 0$: $\varrho = \varrho_*^r$ $u = u_*$ $p = p_*$
b) $u_* \leqq 0$: $\varrho = \varrho_*^l$ $u = u_*$ $p = p_*$.

Mit diesen Ergebnissen berechnen sich die Lösungen schließlich über den 2. Schritt des Lax-Wendroff-Verfahrens:

$$(29.2) \qquad U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{ F_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - F_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} .$$

Eine Erweiterung dieser Methode, die auch im 2. Schritt die Godunov-Iteration benutzt und die damit exakt die Rankine-Hugoniot-Bedingungen erfüllt, ist die Glimm-Chorin-Prozedur der "Random-Choice-Lösung" (vgl. Chorin & Marsden /15/, Sod /64/).
Bei dieser Methode wählt man eine Zufallszahl ζ , welche gleichverteilt im Intervall $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ist, und definiert Zwischenwerte:

$$(30.1) \qquad U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = U(P_j) \quad \text{mit} \quad P_j = ((j + \tfrac{1}{2} + \zeta)\,\Delta x, (n+\tfrac{1}{2})\Delta t),$$

die sich analog der Godunov-Iteration berechnen (vgl. Anhang 8.6). Mit genau der gleichen Konstruktion - allerdings mit einer anderen gleichverteilten Zufallszahl - approximiert man in einem weiteren halben Zeit-Schritt die Werte:

$$(30.2) \qquad U_j^{n+1} = U(P_j) \quad \text{mit} \quad P_j = ((j+\zeta)\Delta x, (n+1)\Delta t) .$$

Die schematische Lösungsmethode dieses Glimm-Chorin-Verfahrens ist im Anhang 8.6 dargestellt.
Eine mathematische Ableitung und ein Beweis zur Konvergenz dieser Methode findet sich bei Liu /40/, 1981.

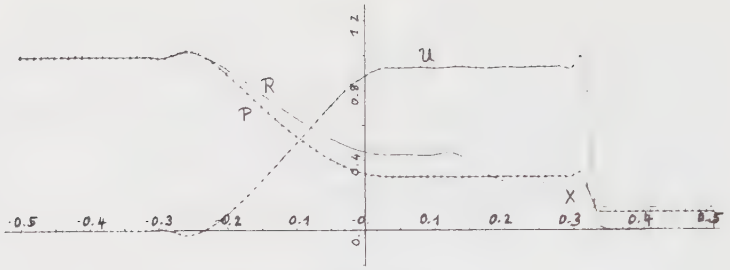


Abb. 6.2 a: Knorr-Mond-Verfahren

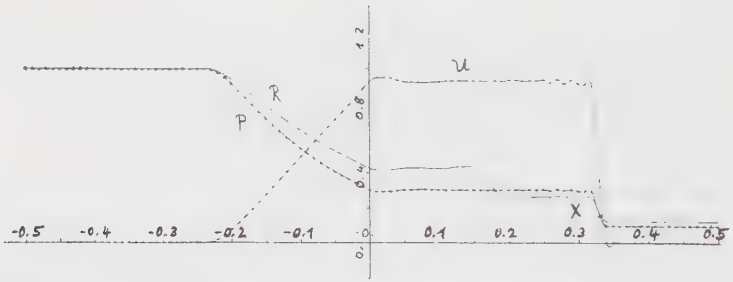


Abb. 6.2 b: Lax-Wendroff-Verfahren mit FCT

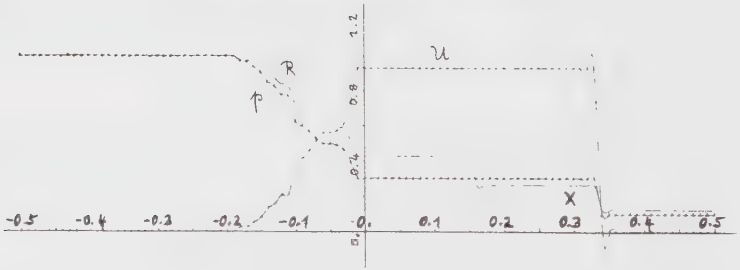


Abb. 6.2 c: Glimm-Chorin-Verfahren

o VERLAUF DER MASSENDICHTE R(X,T)
* VERLAUF DES DRUCKES P(X,T)
+ VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(X,T)

$\Delta x = 0.01$
$\Delta t = 0.0025$
$K = 45$

Abb. 6.2 : Differenzen-Verfahren (Ausgangsdaten (31))

Ortsinkrement Δx
Zeitintervall Δt
Anzahl der Zeitschritte K

Anzahl der Gitterpunkte I = 101

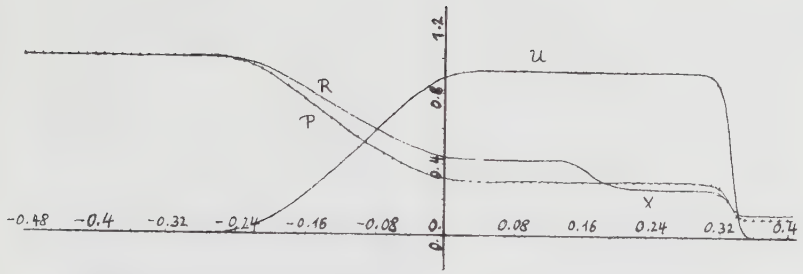


Abb. 6.3 a: McCormack-Verfahren mit Diffusionsterm

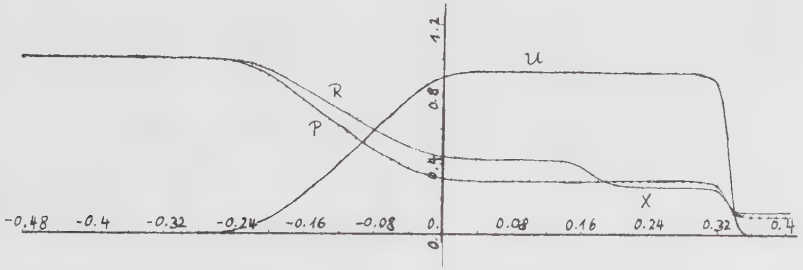


Abb. 6.3 b: Lerat-Peyret-Verfahren mit Diffusionsterm

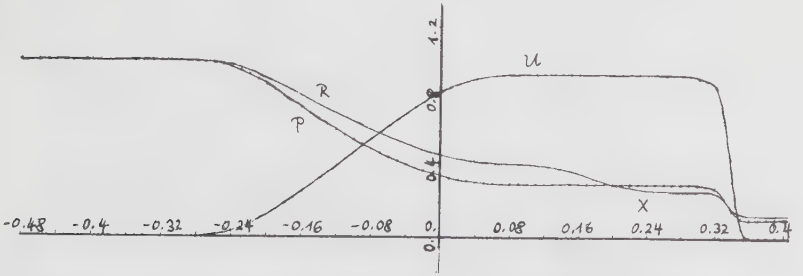


Abb. 6.3 c: Hyman's Prädiktor-Korrektor-Verfahren

○	VERLAUF DER MASSENDICHTE R(X,T)	$\Delta x = 0.01$
△	VERLAUF DES DRUCKES P(X,T)	$K = 45$
+	VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(X,T)	

Abb. 6.3: korrigierte Differenzen-Verfahren

$$\Delta t = 0.9 \frac{\Delta x}{\max(|u| + c)} \qquad \text{(vgl. (11))}$$

6.5 Vergleich und Diskussion der numerischen Verfahren

Die zur Beschreibung der gasdynamischen Eigenschaften von Strömungen benutzbaren numerischen Verfahren vom hyperbolischen Typ sollten neben den mathematischen Bedingungen der Stabilität und der schnellen Konvergenz natürlich wesentlich die physikalischen Anforderungen, wie Darstellung der Stoßfronten und der Kontaktzonen bei Medienübergängen, erfüllen.

Als numerisches Testbeispiel wurde ein typisches Stoßrohr-Problem zugrundegelegt: Eine Membran separiert für Zeiten $t < 0$ an der Stelle $x = 0$ zwei Gebiete mit homogenen ruhenden Gasen unterschiedlicher Dichten ϱ und Drücke p. Zur Zeit $t = 0$ werde die trennende Membran entfernt, und betrachtet wird die zeitliche Entwicklung der nun einsetzenden Ausgleichsströmung.

Als normierte Ausgangsdaten (vgl. (7)) wurden für die numerische Berechnung gewählt (vgl. Sod /64/):

$$(31)\qquad \begin{array}{llll} \varrho_l = 1.0 & u_l = 0. & p_l = 1.0 & \varkappa_l = 1.4 \\ \varrho_r = 0.125 & u_r = 0. & p_r = 0.1 & \varkappa_r = 1.4 \end{array} .$$

Als Ortsinkrement wurde allgemein $\Delta x = 0.01$ gesetzt, während das Zeit-Intervall Δt so gewählt wurde, daß die Stabilitätsbedingung (11) erfüllt war: $\Delta t \approx 0.003$. Die Anzahl der Gitterpunkte betrug $J_p = 301$ und die der Zeitschritte $K \leq 101$.

Aus der Vielzahl der untersuchten Verfahren, die in dieser Arbeit nicht sämtlich erwähnt werden, erweisen sich solche als besonders geeignet für die praktische Benutzung, die die folgenden Kennzeichen aufweisen:

a) explizite konservative Form
b) 2-Schritt Prädiktor-Korrektor-Typ
c) 3-Punkt-, 2-Niveau-Verfahren
d) Genauigkeit von 2. Ordnung in Orts- und Zeitvariablen.

Die im Text bereits erwähnten nachteiligen Phänomene (vgl. Abb. 6.1) korrigiert man mit Hilfe des Hybrid-Verfahrens (24) mittels eines linearen Verfahrens, wie z.B. mit der Rusanov-

Methode (18) - dies ist in Abb. 6.3 dargestellt. Der hierbei aus numerischen Stabilitätsgründen benutzte Viskositätsterm läßt sich dabei den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. Abschnitt 3.2) bzw. der Burgers-Gleichung 3(17) entnehmen.

Keine Korrekturen benötigen das Godunov-Verfahren (29) (vgl. Abb. 6.4) sowie das Thermalisierungs-Verfahren nach Abschnitt 4.7. Dieses letztere Verfahren, das aufgrund einer gaskinetischen Betrachtung abgeleitet wurde, erweist sich als völlig gleichwertig gegenüber den gasdynamischen Berechnungen (vgl. Abb. 4.6 und 4.7). Vorteilhaft ist dabei jedoch die flexiblere Anwendung bei Randbedingungen, wie Reflexionen an Wänden, die durch Symmetriebeziehungen in der Verteilungs-Funktion $f_1(v; \varrho, u, T)$ ausgedrückt werden können (vgl. Reitz /56/). Ebenfalls anwendbar ist dieses Verfahren in der Navier-Stokes-Näherung, wenn man aufgrund der Chapman-Enskog-Entwicklung (vgl. Bird /3/) ansetzt: $f_{NS} = f_1(1 + \varphi)$ mit

$$(32.1)\quad \varphi = -\left\{ \frac{\lambda}{\varrho (RT)^2} \left(\frac{W^2}{nRT} - 1 \right) \underline{W} \cdot \frac{\partial}{\partial \underline{x}} T + \frac{\mu}{\varrho (RT)^2} \underline{W}^{\circ} \underline{W} : \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \underline{u} \right\}$$

$$(32.2)\quad \underline{W} := \underline{v} - \underline{u} \qquad W_i^{\circ} W_j := W_i W_j - \frac{1}{n} \underline{W}^2 \delta_{ij} \quad .$$

Betrachten wir anstelle der einfachen Expansion (31) eine Druckerhöhung im Hochdruckteil (z.B. durch Zündung von Knallgas), so erhalten wir im Treibgas eine rückläufige Stoßwelle (vgl. Abb. 6.5), die aufgrund des Diffusionscharakters des Thermalisierungsverfahrens zeitlich erheblich schneller verschmiert wird als die Lösungen, die aufgrund der hyperbolischen gasdynamischen Gleichungen berechnet werden (vgl. Abb. 6.5).

Alle in diesem Abschnitt untersuchten Verfahren erweisen sich jedoch im Hinblick auf die Erfüllung der globalen Erhaltungssätze (vgl. Abschnitt 5.6 und 5.7) als weitgehend ungeeignet, das Aufsteilen Riemann'scher Wellen bzw. die Entwicklung von Stoßwellen in einem Gebiet relativ homogen verteilter Zustandsgrößen zu beschreiben. Die Verfahren zeigen einen zeitlich linear wachsenden Gesamtimpuls $\mathcal{I} = (p_l - p_r)t$,

woraus folgt, daß diese Berechnungsmethoden physikalisch nur dann anwendbar sind, wenn der Impulsausgleich z.B. durch die Rohrberandung (vgl. 4(24)) erfolgen kann (vgl. Wenk /69/, Anhang A).
Die instationären Navier-Stokes-Gleichungen 3(1) lassen sich zwar mit Hilfe der Differenzen-Approximationen (vgl. Anhang 8.4) behandeln, doch zeigen derartige Verfahren eine unerwünschte Abhängigkeit ihrer Stabilität von der Reynolds-Zahl Re.

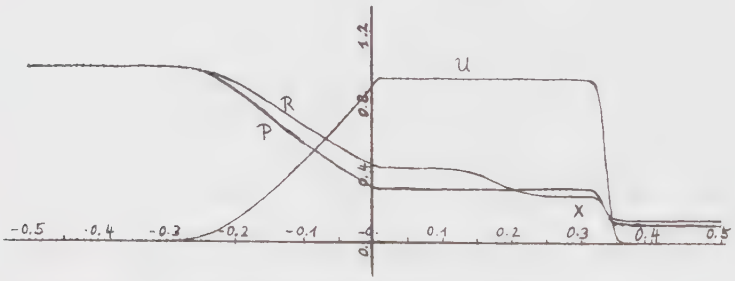


Abb. 6.4 a: Godunov-Lagrange-Verfahren

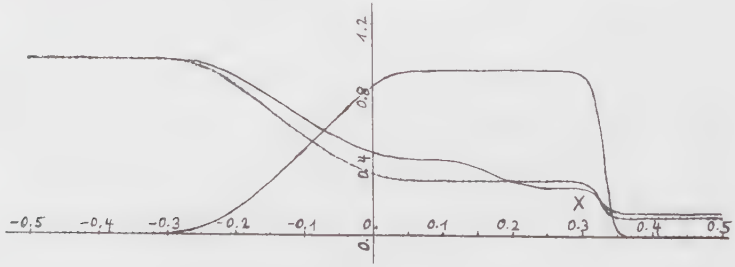
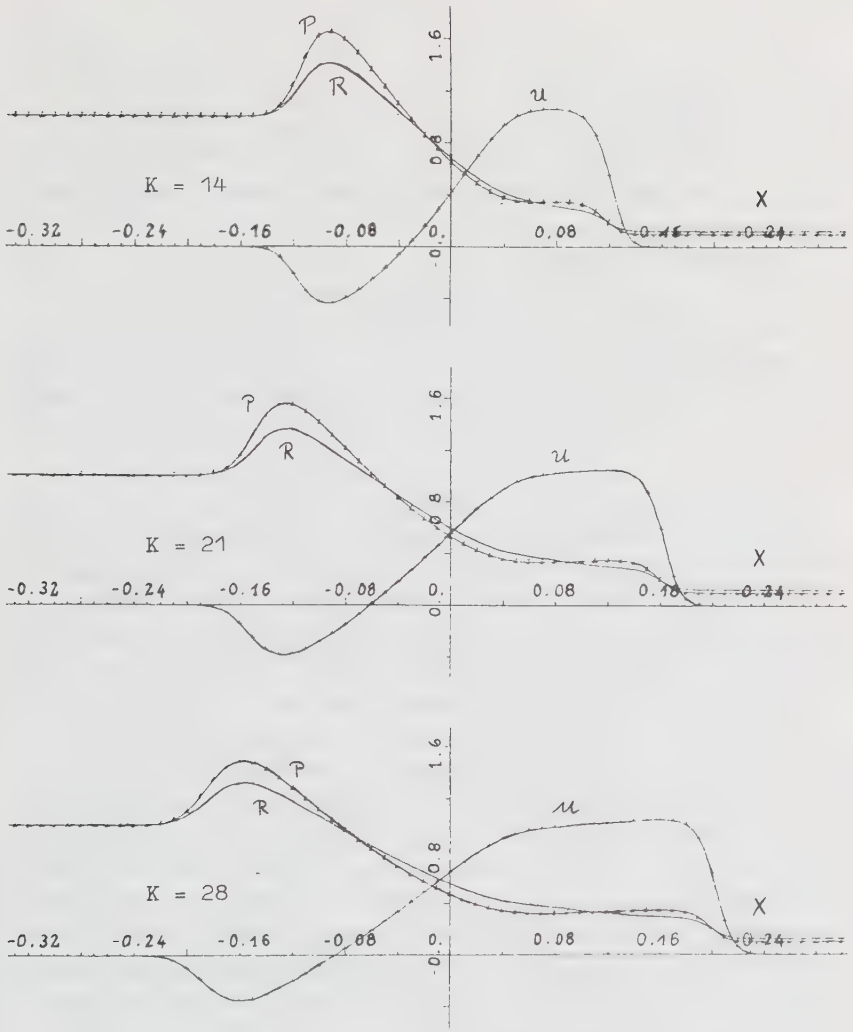


Abb. 6.4 b: Thermalisierungsverfahren

o VERLAUF DER MASSENDICHTE R(X,T)
Δ VERLAUF DES DRUCKES P(X,T)
+ VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT U(X,T)

Daten vgl. Abb. 6.2

Abb. 6.4: Verfahren ohne Korrekturen



○	VERLAUF DER MASSENDICHTE	R(X,T)	Δx = 0.01
△	VERLAUF DES DRUCKES	P(X,T)	Δt = 0.0035
+	VERLAUF DER GESCHWINDIGKEIT	U(X,T)	

Abb. 6.5: Zeitliche Entwicklung einer rückläufigen Stoßwelle
- McCormack-Verfahren -

7. Zusammenfassung

Ziel der Untersuchungen dieser Arbeit war die analytische und numerische Beschreibung eindimensionaler, instationärer Gasströmungen auf der Grundlage der anisentropen gasdynamischen Gleichungen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen waren die für isentrope Verhältnisse abgeleiteten Lösungen der einfachen Wellen von Riemann sowie die Burgers'sche Ähnlichkeitslösung als Spezialfall einer Expansionsströmung ins Vakuum, deren wesentliches Merkmal die lineare Abhängigkeit von der Homologie-Variablen $z = x/t$ ist.

Unter dem Gesichtspunkt variabler Entropie wurden zunächst die linearisierten kompressiblen (und viskosen) Navier-Stokes-Gleichungen für ein einfaches Stoßrohr-Problem explizit gelöst. Obwohl die Ergebnisse für das Auftreten von Stoßwellen-Lösungen quantitativ unbefriedigend sind, zeigen sie doch qualitativ das empirisch bekannte Verhalten. Es treten zwei sich gegenläufig ausbreitende Diffusions-Wellenmoden und eine reine Diffusionsmode an der Mediengrenze auf. Innerhalb einer quadratisch-nichtlinearen Entwicklung des Gleichungssystems wurde eine entkoppelte nichtlineare Differential-Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit hergeleitet. Diese spezielle Burgers-Gleichung ist vom Typ der Riemann'schen Gleichung für die einfachen Wellen, erweitert um einen Viskositätsterm; sie ist für ein Anfangswertproblem explizit lösbar, und ihre Lösungen, die mit empirischen Werten recht gut übereinstimmen, besitzen Stoßwellen-Eigenschaften (vgl. Kapitel 3).

Eine derartige Burgers-Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit ließ sich ebenfalls aus einer gaskinetischen Betrachtungsweise des Strömungsverhaltens von Knudsen-Gasen herleiten: Bei der Untersuchung der Ausgleichsströmung eines anfangs isothermen räumlich inhomogenen ruhenden Gases hat Narasimha (in Verallgemeinerung der Keller'schen Lösung) für die Dichte eine entkoppelte lineare Differentialgleichung angegeben. Es

zeigte sich, daß überdies für die Strömungsgeschwindigkeit eine separate nichtlineare Differentialgleichung hergeleitet werden kann, die (bei geeigneter Zeittransformation) auf eine Burgers-Gleichung führt und infolgedessen im wesentlichen deren Lösungsmenge besitzt (vgl. Abschnitt 4.3 - 4.5). Dazu wurde ein numerisches Verfahren angegeben, bei dem auf die (für die analytische Lösung vorausgesetzte) Einschränkung auf Knudsen-Gase verzichtet werden kann (vgl. Abschnitt 4.7). Die damit auch für allgemeinere Anfangsverteilungen berechneten Strömungsverläufe entsprechen denjenigen, die aufgrund verschiedener Finite-Differenz-Verfahren zu den hyperbolischen gasdynamischen Gleichungen berechnet wurden (vgl. Kapitel 6).

Ferner interessierte insbesondere die analytische Behandlung der eindimensionalen instationären Expansionsströmung innerhalb der idealen anisentropen Gasdynamik. Mittels charakteristischer Variablen, die sich in Anlehnung an die Lagrange-Betrachtung und die Homologie-Variable $z = x/t$ der Burgers'schen Ähnlichkeitslösung im isentropen Fall ergaben, ließ sich ein allgemeines iteratives Lösungsverfahren angeben. Im Sonderfall eines in der Homologie-Variablen z linearen Geschwindigkeitsprofils, das für Abströmprobleme in weiten Bereichen charakteristisch zu sein scheint, ließ sich das System in Verallgemeinerung der Burgers-Lösung auf anisoentrope Verhältnisse explizit lösen. Hierbei zeigte sich ein durch die Entropieänderung schwach gestörter in z fast linearer Verlauf der Schallgeschwindigkeit $c = (u-z)\sqrt{1+\varphi(s)}$, worin die Funktion $\varphi = \varphi(s)$ gerade die Abweichung von der Burgers-Lösung darstellt, die durch die Entropie $s = s(z,t)$ hervorgerufen wird (vgl. Abschnitt 5.1 - 5.5).

Zu der von Larenz und Wenk unter der Voraussetzung der Erfüllung globaler Erhaltungssätze konstruierten (bereichsweise isentropen) Homologie-Lösung (vgl. Abschnitt 5.6) konnte hiermit die zeitliche Entwicklung einer schwachen Stoßwelle dargestellt werden. Diese entwickelt sich von einem ungestörten Anfangszustand, gegeben in einem Halbraum zur

Zeit $t = 0$, und erreicht einen asymptotischen Endzustand, welcher durch die Wenk'sche $\sqrt{2}$-Lösung beschrieben werden kann. Diese für die Expansion eines Gases ins Vakuum durchgeführte Betrachtung ließ sich bei Beschränkung auf den asymptotischen Strömungsverlauf auf den Fall des Überströmens eines Treibgases in ein Laufgas verallgemeinern. Die maximale Strömungsgeschwindigkeit liegt dabei (bei einer Mach-Zahl $M_r \approx 10$ und bei realistischen $\varkappa$-Werten) um rund 25% niedriger als aufgrund einer Berechnung nach der sogenannten Taub-Gleichung (vgl. Abschnitt 5.7), zeigt jedoch im wesentlichen das gleiche qualitative Verhalten in Abhängigkeit von vorgegebenen Ausgangsdaten. Die so berechneten Werte stimmen damit besser mit den experimentellen Ergebnissen überein als diejenigen gemäß der Taub-Gleichung, die zur Berechnung der theoretischen Leistung eines Stoßrohres häufig Verwendung findet.

Nicht untersucht wurden die bei realen Stoßrohrexperimenten auftretenden Effekte wie Abweichungen vom perfekten Gasverhalten, Anregungsvorgänge, Ionisation und Turbulenzerscheinungen.

8. Anhang

8.1 Allgemeine Koordinatentransformationen

z,y seien neue, unabhängige Variablen: $z=z(x,t)$ $y=y(x,t)$

Funktionaldeterminante: $J = \frac{\partial(z,y)}{\partial(x,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = z_x y_t - z_t y_x \neq 0$

mit $J^{-1} = \frac{\partial(x,t)}{\partial(z,y)} = x_z t_y - t_z x_y$

Eigenschaften der Funktionaldeterminante:

1.) $\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,t)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(t,x)} = -\frac{\partial(z,y)}{\partial(t,x)} = \left(\frac{\partial(x,t)}{\partial(z,y)}\right)^{-1}$

2.) $\frac{\partial(z,t)}{\partial(x,t)} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t$

3.) $\frac{\partial(z,y)}{\partial(x,t)} = \frac{\partial(z,y)}{\partial(\xi,\tau)} \cdot \frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(x,t)} = \frac{\partial(z,y)}{\partial(\xi,\tau)} \cdot \left(\frac{\partial(x,t)}{\partial(\xi,\tau)}\right)^{-1}$

Transformationen: $x=x(z,y)$ $t=t(z,y)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_t + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_y$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_t \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = J\frac{\partial t}{\partial y} \; ; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = -J\frac{\partial x}{\partial y} \; ; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -J\frac{\partial t}{\partial z} \; ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = J\frac{\partial x}{\partial z}$$

Beispiel: Lagrange-Koordinaten: $a=a(x,t)$

$u = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_a$ Strömungsgeschwindigkeit

$D = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_t = J^{-1}$ Dilatation

mit der Integrabilitätsbedingung: $\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_t = \left(\frac{\partial D}{\partial t}\right)_a$

Transformation:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a - \frac{u}{D}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_t \\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_t &= \frac{1}{D}\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_t \end{aligned}\right\} \quad \text{substantielle Ableitung} \quad \frac{d}{dt} := \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_t$$

8.2 Lösung eines Systems linearer Diffusionsgleichungen

Es liege ein lineares Gleichungssystem mit konstanten Koeffizientenmatrizen $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{R}}$ (vgl. Abschnitt 3.2)

$$(1) \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial t} + \underline{\underline{A}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right\}\underline{U} = \underline{\underline{R}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\underline{U}$$

für ein Anfangswertproblem $\underline{U}(x,o) = \underline{U}^{(o)}(x)$ vor. Wir setzen voraus, daß $\underline{U}$ einen kompakten Träger besitzt, so daß hierauf bzgl. der Ortsvariablen x eine Fourier-Transformation

$$\underline{U}(k,t) = \int_{\mathbb{R}} dx\; e^{ikx}\underline{U}(x,t)$$

angewendet werden kann. Das Fourier-transformierte System für $\underline{U} = \underline{U}(k,t)$ stellt sich damit als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung bzgl. der Zeitvariablen t dar:

$$\underline{U}_t = \underline{\underline{B}}\cdot\underline{U} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\underline{B}} = ik(\underline{\underline{A}} + ik\underline{\underline{R}}) = \underline{\underline{B}}(k)$$

mit der (formalen) Lösung:

$$\underline{U}(k,t) = \exp(\underline{\underline{B}}t)\cdot\underline{U}_o(k) \; .$$

Die Lösung der Ausgangsgleichung (1) gewinnt man durch Fourier-Rücktransformation oder mit Hilfe des Faltungssatzes der Fourier-Transformation

$$(2.1) \qquad \underline{U}(x,t) = \underline{\underline{G}} * \underline{U}^{(o)} := \int_{\mathbb{R}} dx'\; \underline{\underline{G}}(x',t)\cdot\underline{U}^{(o)}(x-x') \; ,$$

worin sich die Grundlösung (Greensche Funktion) darstellt als:

$$(2.2) \qquad \underline{\underline{G}}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi}\, e^{-ikx}\exp(\underline{\underline{B}}t) \; .$$

Diese mehr symbolische Lösung, in der die Matrix $\exp(\underline{\underline{B}}t)$ über die entsprechende Reihendarstellung definiert ist, läßt sich konkreter angeben:

$$\exp(\underline{\underline{B}}t) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\underline{\underline{B}}t)^n \; .$$

Dazu setzen wir voraus, daß $\underline{\underline{B}}$ symmetrisch ist: $B_{ij} = B_{ji}$; dann gilt aber nach Sätzen der Linearen Algebra (vgl. Courant, Hilbert /18/), daß $\underline{\underline{B}}$ diagonalisierbar ist.

Dazu müssen die Eigenwerte d^j von $\underline{\underline{B}}$ berechnet werden:

$$\det(\underline{\underline{B}} - d\underline{\underline{I}}) \qquad \text{mit} \qquad (\underline{\underline{I}})_{ij} := \delta_{ij}$$

und die zugehörigen Eigenvektoren $\underline{b}^j$ von $\underline{\underline{B}}$ ergeben sich aus:

$$\underline{\underline{B}}\cdot\underline{b}^j = d^j\underline{b}^j \qquad \text{bzw.} \qquad (d^i - d^j)\,\underline{b}^i\cdot\underline{b}^j = 0 \; .$$

Die Matrix der Eigenvektoren $\underline{\underline{S}}$ wird definiert durch:

$$S_{ij} := b_i^j \quad ,$$

und die dazu inverse Matrix $\underline{\underline{S}}^{-1}$ ermittelt sich aus $\underline{\underline{S}}$ in der Form:

$$(\underline{\underline{S}}^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det \underline{\underline{S}}} (\underline{\underline{S}}^{tr}_{adj})_{ij} = \frac{b_j^i}{|\underline{b}^j|^2} \quad .$$

Matrix $\underline{\underline{B}}$ läßt sich nun mit Hilfe der Diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ und den Eigenvektoren darstellen als:

$$\exp(\underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{S}} \cdot \exp(\underline{\underline{D}}) \cdot \underline{\underline{S}}^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \exp(d^j) \frac{\underline{b}^j \underline{b}^j}{|\underline{b}^j|^2} \quad .$$

Hiermit erhält man nun eine explizite Darstellung für die Greensche Funktion des Systems:

$$(2.3) \quad \underline{\underline{G}}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} \exp\{-ikx + d^j t\} \frac{\underline{b}^j \underline{b}^j}{|\underline{b}^j|^2} \quad .$$

Im Falle verschwindenden Tensors $(\underline{\underline{B}})_{ij} \longrightarrow 0$ gilt $\underline{\underline{B}} = ik\underline{\underline{A}}$. Für die Eigenwerte von $\underline{\underline{B}}$ gilt dann: $d^j = ik\, d_o^j$ mit den Eigenwerten d_o^j der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$, die Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$ stimmen überein und sind unabhängig von k, so daß gilt:

$$(3.1) \quad \underline{\underline{G}}_o(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - d_o^j t) \frac{\underline{b}_o^j \underline{b}_o^j}{|\underline{b}_o^j|^2} \quad .$$

Die Lösung $\underline{U}$ des ungestörten Systems, die sich als Faltung der Greenschen Funktion $\underline{\underline{G}}_o(x,t)$ mit der Anfangsverteilung $\underline{U}^{(o)}(x)$ ergibt, läßt sich somit darstellen als:

$$(3.2) \quad \underline{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \phi^j(x - d_o^j t)\, \underline{b}_o^j \quad \text{mit} \quad \phi^j(x) = \frac{\underline{b}_o^j \cdot \underline{U}^{(o)}(x)}{|\underline{b}_o^j|^2} \quad ,$$

worin die Koeffizientenfunktionen ϕ^j einzelne stationäre Wellenmoden beschreiben.

Bei Berücksichtigung des Tensors $\underline{\underline{R}}$ als Störung der Ordnung σ des Systems mit der Lösung (3.2) treten diese stationären Wellenmoden, überlagert von einer zusätzlichen schwachen Zeitabhängigkeit, auf:

$$\phi^j = \phi^j(x - d_o^j t \,,\, \sigma t) \quad .$$

8.3 Integrale über Gauß-Verteilungen

1.) Grundintegrale:

(1) $\Gamma(n) := \int_0^\infty dx\, x^{n-1} \exp(-x) = (n-1)!$ Gamma-Funktion

Substitution $x \longrightarrow \beta x^2$ führt auf:

(2) $J(n) := \int_0^\infty dx\, x^n \exp(-\beta x^2) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{n+1}{2})\, \beta^{-\frac{n+1}{2}}$

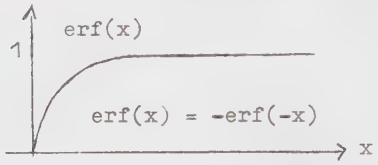
mit: $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2\int_0^\infty dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi}$ folgt:

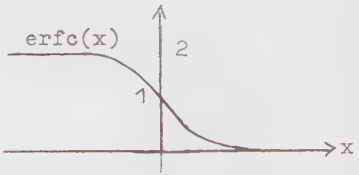
$$J(2k+1) = \frac{1}{2}\frac{k!}{\beta^{k+1}}\,; \quad J(2k) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\,\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{(2\beta)^k}$$

2.) Funktionen:

(3) $\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dx' \exp(-x'^2)$ kompl.Fehler-Funktion

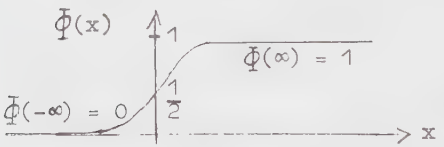
(4) $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dx' \exp(-x'^2) = 1 - \operatorname{erfc}(x)$ Fehler-Funktion





Wahrscheinlichkeitsintegral (Normalverteilung):

(5) $\Phi(\frac{x-y}{\sqrt{s}}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^x dx' \exp\left[\frac{(x'-y)^2}{2s}\right] = \frac{1}{2}\left\{1 + \operatorname{erf}(\frac{x-y}{\sqrt{2s}})\right\}$



$$\lim_{s\to 0} \Phi(\frac{x-y}{\sqrt{s}}) = \Theta(x-y)$$

3.) Reihendarstellungen:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\left\{1 + \frac{1}{12n} + \ldots\right\}$$ Stirling-Formel

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!(2j+1)}\, x^{2j} \qquad |x| \ll 1 \ \ldots$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} \sum_{j=0}^\infty \frac{(2x^2)^j}{1\cdot 3\cdots(2j+1)} \qquad |x| \ll 1$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^\infty (-1)^j\, \frac{1\cdot 3\cdots(2j+1)}{(2x^2)^j} \qquad x \gg 1$$

8.4 Numerische Operatoren

1.) Mittelwert m, Differenz d und Translation E

$$mf_{j+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2}(f_{j+1}+f_j) \qquad df_{j+\frac{1}{2}} := f_{j+1}-f_j \qquad Ef_j := f_{j+1}$$

$$d_+f_j := f_{j+1}-f_j \qquad d_-f_j := f_j-f_{j-1} \qquad d_of_j := \frac{1}{2}(f_{j+1}-f_{j-1})$$

Zusammenhang der Operatoren:

$$d_+ = E - 1 \qquad d = E^{1/2} - E^{-1/2}$$

$$d_- = 1 - E^{-1}d_+ \qquad m = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$$

$$d_o = \frac{1}{2}(d_+ + d_-) = md \qquad m^2 = 1 + \frac{1}{4}d^2$$

$$d_+d_- = d_-d_+ = \quad = d^2 \qquad q := md(1 - \frac{1}{6}d^2)$$

$$1 = mm^{-1} = m(1 + \frac{1}{4}d^2)^{-1/2} = m(1 - \frac{1}{8}d^2 + \frac{3}{128}d^4 \mp \ldots)$$

2.) Ableitungs-Operatoren:

$$Df := \frac{d}{dx}f(x)$$

$$D_+f_j := \frac{f_{j+1}-f_j}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \text{"Vorwärtsableitung"}$$

$$D_-f_j := \frac{f_j-f_{j-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad \text{"Rückwärtsableitung"}$$

$$D_of_j := \frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \qquad \text{"zentrierte Ableitung"}$$

3.) Ableitungen höherer Ordnung durch Koeffizientenvergleich aus:

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i(\Delta x)^i f^{(i)}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j f(x \pm j\Delta x) - f(x)\sum_{j=1}^{m} a_j + O(\Delta x)^{n+1}$$

mit: $$\beta_i = \frac{(\pm 1)^i}{i!}\sum_{j=1}^{m} a_j (j)^i \qquad i = 1, \ldots, n$$

symmetrische Ausdrücke:

$$f_{j+k} - 2f_j + f_{j-k} = k^2(\Delta x)^2 f_j^{(2)} + \frac{2}{4!}k^4(\Delta x)^4 f_j^{(4)} + \ldots$$

$$f_{j+k} - f_{j-k} = 2k\,\Delta x\, f_j^{(1)} + \frac{2}{3!}k^3(\Delta x)^3 f_j^{(3)} + \ldots$$

Beispiel:

$$Qf_j := f_j^{(1)}(x) + O(\Delta x)^4 = \frac{4}{3}\frac{f_{j+1}-f_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3}\frac{f_{j+2}-f_{j-2}}{4\Delta x}\,.$$

8.5 Übersicht über die numerischen Lösungsverfahren

	σ	Verfahren
Godunov	1	$\bar{U}^{n+1}_{j+\frac{1}{2}} = mU^n_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF^n_{j+\frac{1}{2}}$ $U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, d\bar{F}^{n+1}_j$
Lax-Wendroff	2	$U^{n+\frac{1}{2}}_{j+\frac{1}{2}} = mU^n_{j+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\, dF^n_{j+\frac{1}{2}}$ $U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF^{n+\frac{1}{2}}_j$
MacCormack Prädiktor- Korrektor	2	$\overline{U^{n+1}_j} = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, dF^n_{j+\frac{1}{2}}$ $U^{n+}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\,(dF^n_{j+\frac{1}{2}} + d\overline{F^{n+1}_{j-\frac{1}{2}}})$
Rusanov w = 1	1	$U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, D_o F^n_j + \frac{w}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\, d(m\tilde{\alpha}^n_j dU^n_j)$ $\alpha^n_j := u^n_j + c^n_j$
Upwind	1	$U^{n+1}_j = U^n_j - \mathrm{sgn}(u^n_j)\frac{x}{t}(G^n_j - G^n_{j+s}) - \frac{\Delta x}{\Delta t} D_o S^n_j$ mit: $G = \begin{pmatrix} qu \\ qu^2 \\ hu \end{pmatrix}$ $S = \begin{pmatrix} o \\ p \\ o \end{pmatrix}$ $s(u) = \begin{cases} -1 & f.u^n_j = 0 \\ 1 & f.u^n_j\ 0 \end{cases}$
Gary Prädiktor- Korrektor	2	$\overline{U^{n+1}_j} = U^n_j - \frac{\Delta t}{x}\, D_o F^n_j$ $U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\,(D_o F^n_j + D_o \overline{F^{n+1}_j})$
Hyman w = 4/5 Prädiktor- Korrektor	2/4	$\overline{U^{n+1}_j} = U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x} QF^n_j + \frac{w}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\, d(m\alpha^n_j dU^n_j)$ $=: U^n_j - \frac{\Delta t}{\Delta x}\, G^n_j$ $U^{n+1}_j = U^n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(G^n_j + \overline{G^{n+1}_j})$

8.6 Implementierung des Glimm-Chorin-Verfahrens

Glimm-Chorin-Prozedur: I. linke Seite der Strömung:

$\zeta \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\qquad w = \frac{dx}{dt} = 2\zeta\frac{\Delta x}{\Delta t} < u_*$

a) **Stoßwelle:** $\qquad p_* > p_1$

1.) links von der Stoßwelle $\frac{dx}{dt} = W_1$: $\qquad w < W_1$

(L1) $\varrho = \varrho_1 \qquad u = u_1 \qquad p = p_1$

2.) rechts von der Stoßwelle $\frac{dx}{dt} = W_1$: $\qquad w \geq W_1$

(L2) $\varrho = \frac{B_1}{u_* - W_1} \qquad u = u_* \qquad p = p_*$

b) **Expansionswelle:** $\qquad p \quad p_1$

Bereich: $\qquad u_1 - c_1 \leqq \frac{dx}{dt} \leqq u_* - c_*$

$c_1^2 = \varkappa p_1/\varrho_1$ mit $p = A(s)\varrho^\varkappa$ und $s = \text{const}$

$c_*^2 = \varkappa p_*/\varrho_* \qquad A = p_1\varrho_1^{-\varkappa} = p_*\varrho_*^{-\varkappa}$: $\varrho_*^0 = \varrho_1(p_*/p_1)^{1/\varkappa}$

1.) rechts vom Fächer: $\qquad w \geq u_* - c_*$

(R3) $\varrho = \varrho_*^0 \qquad u = u_* \qquad p = p_*$

2.) innerhalb des Fächers: $u_1 - c_1 \leqq w < u_* - c_*$

$w = u_s - c_s$, Riemann-Invariante: $u_s + \frac{2}{\varkappa-1}c_s = u_1 + \frac{2}{\varkappa-1}c_1$

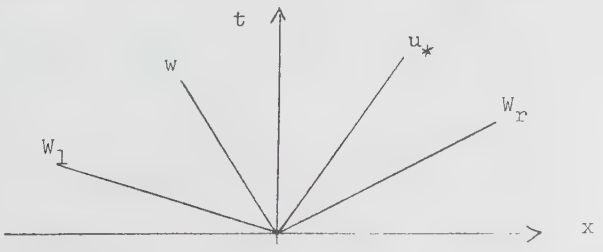
$u_s = \frac{2}{\varkappa+1}(w + c_1 + \frac{\varkappa-1}{2}u_1)$, $\qquad c_s = c_1 + \frac{\varkappa-1}{2}(u_1 - u_s)$

$A = p_1\varrho_1^{-\varkappa}$: $\qquad \varrho_s = (\frac{c_s^2}{\varkappa A})^{\frac{1}{\varkappa-1}}$; $\qquad p_s = A\varrho_s^\varkappa$

(R4) $\varrho = \varrho_s \qquad u = u_s \qquad p = p_s$

3.) links vom Fächer: $\qquad w < u_1 - c_1$

(R5) $\varrho = \varrho_1 \qquad u = u_1 \qquad p = p_1$



Glimm-Chorin-Prozedur: $\varphi \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

II. Rechte Seite der Strömung:

$$w = \frac{dx}{dt} = 2\varphi\frac{\Delta x}{\Delta t} \gtrless u_*$$

a) Stoßwelle: $p_* > p_r$

1.) rechts von der Stoßlinie $\frac{dx}{dt} = W_r$: $w \gtrless W_r$

(R1) $\varrho = \varrho_r$ $u = u_r$ $p = p_r$

2.) links von der Stoßlinie $\frac{dx}{dt} = W_r$: $w < W_r$

(R2) $\varrho = \frac{B_r}{W_r - u_*}$ $u = u_*$ $p = p_*$

b) Expansionswelle: $p_* \leqq p_r$

Bereich: $u_* + c_* \leqq \frac{dx}{dt} \leqq u_r + c_r$

$c_r^2 = \varkappa p_r/\varrho_r$ mit $p = A(s)$ und $s = \text{const}$

$c_*^2 = \varkappa p_*/\varrho_*$ $A = p_r \varrho_r^{-\varkappa} = p_* \varrho_*^{-\varkappa}$ $\varrho_*^0 = \varrho_r (p_*/p_r)^{1/\varkappa}$

1.) links vom Fächer: $w < u_* + c_*$

(L3) $\varrho = \varrho_*^0$ $u = u_*$ $p = p_*$

2.) innerhalb des Fächers: $u_* + c_* \leqq w < u_r + c_r$

$w = u + c$, Riemann-Invariante: $u_s - \frac{2}{\varkappa-1} c_s = u_r - \frac{2}{\varkappa-1} c_r$

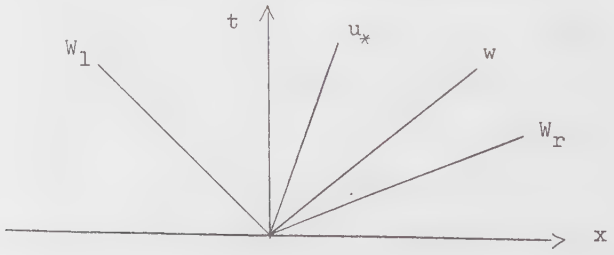
$u_s = \frac{2}{\varkappa+1}(w - c_r - \frac{\varkappa-1}{2} u_r)$, $c_s = c_r + \frac{\varkappa-1}{2}(u - u_r)$

$A = p_r \varrho_r^{-\varkappa}$: $\varrho_s = (\frac{c_s^2}{\varkappa A})^{\frac{1}{\varkappa-1}}$, $p_s = A \varrho_s^{\varkappa}$

(L4) $\varrho = \varrho_s$ $u = u_s$ $p = p_s$

3.) rechts vom Fächer: $w = u_r + c_r$

(L5) $\varrho = \varrho_r$ $u = u_r$ $p = p_r$



8.7 Ableitung der Gleichung von Taub ($M_1 = 1$, vgl. 5.7)

1.) Stoßbedingungen an der Stoßfront:

$$u_1 - u_r = \frac{p_1 - p_r}{\sqrt{p_r \rho_r}\ \sqrt{\frac{\varkappa_r+1}{2}\frac{p_1}{p_r} + \frac{\varkappa_r-1}{2}}}$$

2.) isentrope Strömung im Verdünnungsfächer:

C^1 - Charakteristik: $u + \frac{2}{\varkappa-1} c = \text{const}$

Adiabatengleichung: $p = A\,\rho^{\varkappa}$ $\qquad c^2 = \varkappa p/\rho$

$$u_3 - u_1 = \frac{2c_1}{\varkappa_1-1}\left(1 - \frac{c_3}{c_1}\right) = \frac{2c_1}{\varkappa_1-1}\left\{1 - \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa_\ell-1}{2\varkappa_\ell}}\right\}$$

3.) Stetigkeit an der Mediengrenze: K : $u_1 = u_2$ $\quad p_1 = p_2$

4.) Stetiger Anschluß an der Staukante: $u_3(x_3) = u_2 = u_*$

$p_3(x_3) = p_2 = p_*$

$$u_r + \frac{c_r}{\sqrt{\varkappa_r}}\,\frac{\frac{p_1}{p_r}-1}{\sqrt{\frac{\varkappa_r+1}{2}\frac{p_1}{p_r} + \frac{\varkappa_r-1}{2}}} = u_1 + \frac{2c_1}{\varkappa_\ell-1}\left\{1 - \left(\frac{p_1}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa_\ell-1}{2\varkappa_\ell}}\right\}$$

$$\frac{p_1}{p_r} = \frac{p_1}{p_r}\left\{1 - \frac{\varkappa_1-1}{2c_1}\left[u_r - u_1 + \frac{c_r}{\sqrt{\varkappa_r}}\,\frac{\frac{p_1}{p_r}-1}{\sqrt{\frac{\varkappa_r+1}{2}\frac{p_1}{p_r} + \frac{\varkappa_r-1}{2}}}\right]\right\}^{-\frac{2\varkappa_\ell}{\varkappa_\ell-1}}$$

Mach-Zahl $M_r = \frac{w_r - u_r}{c_r} = \sqrt{\frac{\varkappa_r+1}{2\varkappa_r}\frac{p_*}{p_r} + \frac{\varkappa_r-1}{2\varkappa_r}}$

Gleichung von Taub: Iterationsverfahren $p_*^{(o)} = \frac{p_r+p_1}{2}$

$$\frac{p_1}{p_r} = \left\{1 + \frac{2\varkappa_r}{\varkappa_r+1}(M_r^2-1)\right\}\cdot\left\{1 - \frac{\varkappa_1-1}{2c_1}\left[u_r - u_1 + \frac{2c_r}{\varkappa_r+1}\left(M_r - \frac{1}{M_r}\right)\right]\right\}^{-\frac{2\varkappa_\ell}{\varkappa_\ell-1}}$$

Die Strömung ist damit außer im Expansionsfächer vollständig beschrieben, d.h.: die Zustände an den Enden des Expansionsfächers sind unabhängig vom instationären Strömungsverlauf innerhalb des Fächers.

Literaturverzeichnis

/ 1/ E. Becker: Gasdynamik; Teubner, Stuttgart, 1966

/ 2/ R. Becker: Stoßwelle und Detonation; Zeitschr. für Physik 8, 321-362, 1922

/ 3/ G.A. Bird: Molecular Gas Dynamics; Clarendon Press, Oxford, 1976

/ 4/ L. Book: Finite-Difference Technics for Vectorized Fluid Dynamics Calculations; Springer, Berlin, 1981

/ 5/ M. Buhmann: Gasdynamische Rechnungen zum Problem der eindimensionalen Expansionsströmung; Diplomarbeit, Düsseldorf, 1977

/ 6/ J.M. Burgers: Over de eendimensionale voortplanting van drukstoringen in een ideal gas; Vers.Ned.Akad. Wetenschappen; Afd.Naturkunde 52,476,1943

/ 7/ J.M. Burgers: Some Problems of the Motion of Interstellar Clouds I,II; Proc.Kon.Ned.Akad.Wetenschappen 49,588,1943

/ 8/ J.M. Burgers: A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence; Adv.Appl.Mech. 1,171-201; Acad.Press, New York, 1948

/ 9/ J.M. Burgers: The Nonlinear Diffusion Equation; D.Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland; 1974

/10/ R.E. Caflisch: Navier-Stokes and Boltzmann Shock Profiles for a Model of Gas Dynamics; Comm.Pure Appl. Math. 32,521-554,1979

/11/ C. Cercignani: Theory and Application of the Boltzmann-Equation; Scottish Acad.Press, Edinburgh, 1975

/12/ C. Cercignani: Heat Transfer in a Knudsen-Gas; Physica, 97A,440-454,1979

/13/ S. Chapman, T.G. Cowling: The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases; Cambridge Univ.Press, London, 3.Aufl.1970

/14/ A.J. Chorin: Numerical Solution of Boltzmann's Equation; Comm.Pure Appl.Math. 25,171-186,1972

/15/ A.J. Chorin, J.E. Marsden: A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics; Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1979

/16/ Ch.Y. Chow: An Introduction to Computational Fluid Mechanics; John Wiley & Sons, New York, 1979

/17/ T.J. Chung: Finite Element Analysis in Fluid Dynamics; Mc Graw-Hill, New York, 1978

/18/ R. Courant, K.O. Friedrichs: Supersonic Flow and Shock Waves; Interscience, New York, 1948

/19/ R. Courant, D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I,II; Springer, New York-Heidelberg-Berlin,1968

/20/ J.P. Elliot, D. Baganoff: Solution of the Boltzmann Equation at the Upstream and Downstream Singular Points in a Shock Wave; J.Fluid Mech. 65,603-624,1974

/21/ H.P. Greenspan, D.S. Butlar: On the Expansion of a Gas into a Vacuum; J.Fluid Mech. 13,101-119,1962

/22/ H. Grad: The Profil of a Steady Shock Wave; Comm.Pure Appl.Math. 5,257-300,1952

/23/ L. Halabisky, L. Sirovich: Evolution of Finite Disturbances in Dissipative Gasdynamics; Phys.Fluids, 16, 360-368,1973

/24/ A. Harten, J.M. Hyman, P.D. Lax: On Finite Difference Approximation and Entropy Conditions for Shocks; Comm.Pure Appl.Math. 24,297-322,1976

/25/ J.O. Hirschfelder, C.F. Curtiss, R.B. Bird: Molecular Theory of Gases and Liquids; John Wiley & Sons, New York, 3.Aufl.1967

/26/ A. Hobson, D.N. Loomis: Exact Classical Nonequilibrium Statistical-Mechanical Analysis of the Finite Ideal Gas; Phys.Rev. 173,285-295,1968

/27/ M. Holt: Numerical Methods in Fluid Dynamics; Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1977

/28/ E. Hopf: The Partial Differential Equation $u_t+uu_x=\varepsilon u_{xx}$; Comm.Pure Appl.Math. 3,201-230,1950

/29/ Internationale Union für reine und angewandte Physik (IUPAP): Symbole, Einheiten und Nomenklatur in der Physik; Physik, Weinheim, 1980

/30/ J. Jäckle: Einführung in die Transporttheorie; Vieweg, Braunschweig, 1978

/31/ Sh. Kaniel: Approximation of the Hydrodynamic Equations by a Transport Process; Lect.Notes Math. 771,272-286; Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1980

/32/ V.J. Karpman: Nichtlineare Wellen; Akademie, Berlin, 1977

/33/ J.B. Keller: On the Solution of the Boltzmann Equation for Rarefied Gases; Comm.Pure Appl.Math. 1,275,1948

/34/ L.D. Landau, F.M. Lifschitz: Hydrodynamik; Lehrbuch der Theoretischen Physik, Bd.6; Akademie, Berlin, 1974

/35/ L.D. Landau, F.M. Lifschitz: Physical Kinetics; Course of Theoretical Physics, Vol.10: Pergamon Press, Oxford, 1981

/36/ R.W. Larenz, H. Wenk: Shock Phenomena Associated with Expansion Flows; Proc.11th Int.Symp. on Shock Tubes and Waves; Univ. of Washington Press, Seattle and London, 1978

/37/ P.D. Lax: 1. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation; Comm.Pure Appl.Math. 7,159-193,1954;
2. Hyperbolic Systems of Conservation Laws; Comm.Pure Appl.Math. 10,537-566,1957;
3. Development of Singularities of Solutions of Hyperbolic Partial Differential Equations; J.Math.Phys. 5, 611-613,1964;
4. Shock Waves and Entropy; in: Constributions to Functional Analysis; ed. E.Zarantonello; Acad.Press, New York, 1971;
5. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves; Conf.Board Math. Sci. 11, SIAM 1973

/38/ J.L. Lebowitz, H.L. Frisch: Model of Nonequilibrium-Ensemble: Knudsen-Gas; Phys.Rev. 101,919-923,1957

/39/ C.T. Lee: Exact Analysis of a Spatially Nonequilibrium Knudsen-Gas; Can.J.Phys. 52,1139-1143,1974

/40/ T.P. Liu: Admissible Solutions of Hyperbolic Conservation Laws; Amer.Math.Soc., Memoir, Vol. 30,No 240, 1981

/41/ R. Lüst: Hydrodynamik; BI, Mannheim, 1978

/42/ D. Marsal: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen; BI, Mannheim, 1976

/43/ R. McLaughlin: The Numerical Solution of the Unsteady Expansion of a Gas into a Near Vacuum; J.Comp.Phys. 35,77-89,1980

/44/ G.C. McVittie: The Expansion of an Interstellar Gas-Cloud into a Vacuum; Monthly Not.Roy.Astr.Soc. London 110,224,1950

/45/ P. Molmud: Expansion of a Rarefied Gas Cloud into a Vacuum; Phys.Fluids 3,362,1960

/46/ J.P. Moran, S.F. Shen: On the Formation of Weak Shock Waves by Impulsive Motion of a Piston; J.Fluid Mech. 25,705,1966

/47/ C.S. Morawetz: Nonlinear Waves and Shocks; Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1981

/48/ K.W. Morton, A.K. Parotti: Generalized Galerkin Methods for First-Order Hyperbolic Equations; J.Comp.Phys. 36, 249-270,1980; und
K.W. Morton: Generalized Galerkin Methods for Steady and Unsteady Problems; Preprint: IMA Conf.on Numerical Methods for Fluid Dynamics, Reading, März 1982

/49/ H.M. Mott-Smith: The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave; Phys.Rev. 82,885,1951

/50/ R. Narasimha: Collisionless Expansion of Gases into Vacuum; J.Fluid Mech. 12,294-308,1962

/51/ T. Nishida: Fluid Dynamical Limit of the Nonlinear Boltzmann Equation to the Level of the Compressible Euler Equation; Comm.Math.Phys., 119-148,1978

/52/ H. Oertel: Stoßrohre; Springer, Wien-New York, 1966

/53/ K. Oswatitsch: Grundlagen der Gasdynamik; Springer, Wien-New York, 1976

/54/ G. Ottersbach: Zur Beschreibung eindimensionaler Gasexpansionsströmungen mit Hilfe eines Modells teildurchlässiger Wände unter Berücksichtigung der globalen Erhaltungssätze; Diplomarbeit, Düsseldorf, 1976

/55/ R. Peyret, Th.D. Taylor: Computational Methods for Fluid Flow; Springer, New York-Heidelberg-Berlin,1983

/56/ R.D. Reitz: One-Dimensional Compressible Gas Dynamics Calculations Using the Boltzmann Equation; J.Comp. Phys. 42,108-123,1981

/37/ R.D. Richtmyer, K.W. Morton: Difference Methods for Initial-Value Problems; Interscience Publishers, New York, 1967

/58/ B. Robertson: Equations of Motion in Nonequilibrium Statistical Mechanics; Phys.Rev. 144,151,1966

/59/ W. Schneider: Mathematische Methoden der Strömungsmechanik; Vieweg, Braunschweig, 1978

/60/ B.M. Segal, J.H. Ferziger: Shock Wave Structure Using Nonlinear Model Boltzmann Equations; Phys.Fluids 15, 1233-1247,1972

/61/ L. Sirovich: Initial and Boundary Value Problems in Dissipative Gas Dynamics; Phys.Fluids 10,24-34,1967

/62/ L. Sirovich, T.H. Chong: Approximate Solution in Gasdynamics; Phys.Fluids 23,1291-1295,1980

/63/ J. Smoller: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations; Springer, New York-Heidelberg-Berlin, 1983

/64/ G.A. Sod: A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws; J.Comp.Phys. 27,1-31,1978

/65/ K. Suchy: Neue Methoden in der kinetischen Theorie verdünnter Gase; Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften 35,103-294; Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964

/66/ T. Tatsumi, H. Tokunaga: One-Dimensional Shock Turbulence in a Compressible Fluid; J.Fluid Mech. 65,581-601,1974

/67/ F. Weitzsch: Ein neuer Ansatz für die Behandlung gasdynamischer Probleme bei starken Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht; Ann.Phys. 7,403-417, 1961

/68/ C.F. v.Weizsäcker: Genäherte Darstellung starker instationärer Stoßwellen durch Homologie-Lösungen; Zeitschr.Naturf. 9a,269-275 1954; siehe auch:
K. Hain, S. v.Hoerner: Zeitschr.Naturf. 9a,993,1954
S. v.Hoerner: Zeitschr.Naturf. 10a,687,1955
F. Meyer: Zeitschr.Naturf. 10a,699,1955
W. Häfele: Zeitschr.Naturf. 10a,1006,1955

/69/ H. Wenk: Untersuchungen über eindimensionale Expansionsströmungen unter dem Gesichtspunkt der globalen Erhaltungssätze; Dissertation, Düsseldorf, 1974

/70/ G.B. Whitham: Linear and Nonlinear Waves; John Wiley & Sons, New York, 1974

/71/ K. Wieghardt: Theoretische Strömungslehre; Teubner, Stuttgart, 1974

/72/ J.K. Wright: Shock Tubes; John Wiley & Sons, New York, 1961

/73/ Y.B. Zel'dovich, Y.P. Raizer: Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena; Acad.Press, New York, Vol. 1,1966 und Vol.2,1967

/74/ K. Zoller: Zur Struktur des Verdichtungsstoßes; Zeitschr. für Physik 130,1-38,1951

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. R.W. Larenz für die Anregung zu dieser Arbeit, für seine geduldige Unterstützung und seine Bereitschaft zu vielen hilfreichen Diskussionen.

Lebenslauf

Am 18. Mai 1949 wurde ich als Sohn des Oberrechnungsrats Josef Steffens und seiner Ehefrau Katharina, geb.Büttgenbach, in Mönchengladbach geboren.

Von Ostern 1956 bis Ostern 1961 besuchte ich die Katholische Volksschule an der Zeppelinstraße in Mönchengladbach, danach wechselte ich in das Städt. Math.-Naturw. Gymnasium in Mönchengladbach über, wo ich im Frühjahr 1969 das Abitur bestand.

Nach einer zweijährigen Wehrdienst-Zeit vom 1.7.1969 bis 30.6.1971 bei der ABC-Abwehr-Truppe, wo ich zum Offizier der Reserve ausgebildet wurde, begann ich im WS 71/72 das Studium der Mathematik und Physik an der Universität Düsseldorf, wo ich im Juli 1978 die Diplomprüfung in Physik ablegte.

Danach war ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft und - nach einer 9-monatigen Tätigkeit bei der Mannesmann-Datenverarbeitung GmbH - von Dezember 1979 bis November 1982 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Institut für Theoretische Physik der Universität Düsseldorf beschäftigt.

Seit September diesen Jahres bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Firma Rheinmetall GmbH in Düsseldorf.

Seit Juli 1979 bin ich mit der Dipl.-Math. Dr. Jutta Steffens, geb. Stich, verheiratet.

FOTODRUCK J. MAINZ GmbH
Neupforte 13, Nähe Markt, D-5100 Aachen
Telefon: (0241) 27305 und (0241) 38606